ESTRATTO

Sandro Campigotto

I giochi matematici di PhiQuadro

Gare a squadre per le scuole superiori

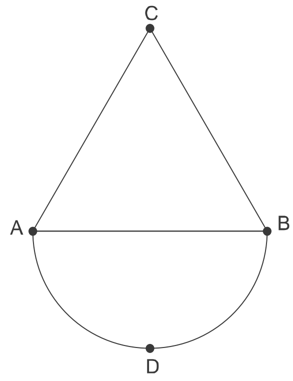
scienza express edizioni

1. La storia infinita

Bastiano Baldassarre Bucci, per sfuggire ad alcuni suoi compagni di classe che lo schernivano, irruppe nella biblioteca di Carlo Corrado Coriandoli. L'uomo stava leggendo un libro dal titolo "La storia infinita".
Irresistibilmente attratto verso il volume da una forza misteriosa e in un impeto istintivo inspiegabile, Bastiano approfittò di un momento di distrazione del signor Coriandoli ed afferrò il libro. Fuggendo più dal suo gesto che dal libraio, Bastiano si rifugiò nella soffitta della scuola e iniziò a leggere il libro...

Allenamento del 15 ottobre 2012. Hanno collaborato: Giuseppe Guttilla, Luca Lamanna, Enrico Munini, Sandro Remondini e Ugo Tomat.

Problema 1.1. Fantàsia in pericolo



Un Fuoco Fatuo giunse in una radura nel bosco e là nel mezzo, alla luce di un falò, scorse riunite tre figure straordinariamente differenti fra loro per specie e proporzioni: un Mordipietra, un Minuscolino ed un piccolo Incubino. Tutti e tre avevano una bandierina bianca o una sciarpa dello stesso colore al collo. Erano dunque ambasciatori, come lui. Entrò nella radura, mostrando la sua bandiera, ma i tre, diffidenti, gli posero un quesito per verificarne l'identità: se un triangolo equilatero è piazzato sopra ad un semicerchio, come mostrato in figura ed il punto D è posto a metà della semicirconferenza, quanti millimetri misura il lato del triangolo, sapendo che $CD = 1\,\mathrm{m}$?

Il campanile lì vicino batté le nove.

Problema 1.2. La chiamata di Atreiu

"Non voglio tentare di diminuire con delle belle parole la portata della nostra sconfitta", disse Cairone ai 499 medici più famosi di Fantàsia. "Noi tutti ci troviamo qui, perplessi e impotenti, di fronte alla malattia dell'Infanta Imperatrice. L'unica cosa che sappiamo è che la distruzione di Fantàsia si va verificando contemporaneamente a questa malattia. L'Infanta Imperatrice mi ha confidato il nome di un eroe, al quale essa affida la sua sorte e quella di tutti noi: questo eroe si chiama Atreiu e abita nel Mare Erboso. A lui io porterò l'Auryn e lo spedirò alla Grande Ricerca." Così dicendo partì per il Mare Erboso ma, quando gli fu presentato Atreiu, un semplice ragazzino, venne preso da dubbi e decise di metterlo alla prova: "Se $\frac{a}{b} = 2012$, quanto vale $\frac{a+2012}{2b+2}$?" La risposta fu immediata e Cairone gli consegnò l'Auryn, il simbolo dell'Infanta Imperatrice, raffigurante due serpenti che si mordono la coda.

Dunque anche il libro portava l'emblema dell'Infanta Imperatrice!

Problema 1.3. Sulle tracce di Atreiu

Su una lontanissima brughiera notturna il nulla si condensò fino a diventare una gigantesca forma fatta d'ombra. L'oscurità s'infittì fino a quando, nella notte buia di quella buia brughiera, si materializzò un nero lupo mannaro. I contorni non erano ancora nitidi, ma già stava lì su quattro enormi zampe: negli occhi di quel possente testone velloso fiammeggiava un bagliore verde. Poi la bestia levò alto il gran muso, annusando l'aria. D'improvviso, parve aver trovato l'odore che cercava, perché dalla sua gola uscì un rombo profondo di trionfo. Il temibile essere si mise sulle tracce di Atreiu, pronunciando il numero 2012 e proseguendo con il numero 17 ottenuto sommando i cubi delle cifre del numero precedente. L'avrebbe raggiunto al 2012° numero pronunciato. Quale fu questo numero?

Problema 1.4. Il bisonte di porpora
Atreiu continuava a cavalcare, senza sapere dove andare e senza neppure incontrare qualcuno che potesse eventualmente dargli qualche consiglio o indicazione. L'amuleto d'oro che portava al collo era guardato con gran rispetto da tutti coloro che incontrava, ma alle sue domande nessuno sapeva rispondere. Una notte fece un sogno. Sognò di essere nelle praterie erbose e di essere a caccia, quando un Bisonte di Porpora gli parlò dicendogli che l'avrebbe aiutato se avesse saputo calcolare la lunghezza minima, in millimetri, della diagonale di un rettangolo di perimetro 20 metri. Atreiu rispose immediatamente e il bisonte lo invitò a cercare la vecchissima Morla nelle Paludi della Tristezza.

Il campanile batté le undici.

Problema 1.5. La vecchissima Morla
Atreiu non seppe mai per quanto tempo aveva continuato a sguazzare come sordo e cieco nella nebbia delle Paludi della Tristezza. Aveva l'impressione di vagare da ore, sempre girando in tondo. Dopo aver perso il suo cavallo Artax, la nebbia aveva cominciato ad avanzare anche nel suo animo. Ad un tratto si trovò di fronte ad un'enorme tartaruga gigante, Morla. La vecchissima Morla sapeva qual era il male dell'imperatrice ma l'avrebbe rivelato solo a chi conosceva la risposta alla domanda che da secoli la turbava: quanti numeri $n \in \mathbb{N}$, con $1 \leq n \leq 2012$ sono coprimi con 6 (cioè $M.C.D.(6, n) = 1$)?

Bastiano tolse dalla cartella il pacchetto della merenda, lo scartocciò, divise accuratamente il panino in due parti, ne avvolse una di nuovo nella carta e la rimise via. L'altra la mangiò.

Problema 1.6. Il profondo abisso
Morla aveva detto che l'imperatrice aveva bisogno di un nuovo "nome" ma che nessuno in Fantàsia poteva darglielo. Aveva anche detto che forse l'Oracolo Meridionale lo sapeva, ma l'oracolo distava 10.000 giorni di viaggio. Atreiu sconsolato aveva cominciato il viaggio ed era giunto presso il Profondo Abisso nel Paese delle Montagne Morte. Aveva cominciato a costeggiare la voragine e per passare il tempo iniziò a riflettere sul seguente enigma: m ed n sono entrambi numeri di 3 cifre dove n è il numero ottenuto da m semplicemente invertendo le sue cifre. Quanti sono i possibili valori distinti di $m - n$? Mentre ancora stava pensando, Atreiu vide sopra l'oscurità del Profondo Abisso, tesa fra le sue due sponde, una mostruosa ragnatela.

Problema 1.7. Ygramul, le molte
Imprigionato nella ragnatela c'era un drago della fortuna. Lo splendido animale sanguinava da molte ferite, perché lì c'era anche qualcos'altro, qualcosa di enorme

che continuava a scagliarsi contro il drago come una nube nera, mutando forma a ogni istante. La creatura non era un unico corpo compatto, ma l'insieme di una inimmaginabile quantità di minuscoli insetti di un azzurro acciaio, che ronzavano come calabroni infuriati e si raggruppavano fino ad assumere di volta in volta le forme più disparate. Una piccola parte degli insetti, il cui numero era uguale alla radice quadrata della metà di tutto il loro sciame, stava pungendo il drago, mentre gli $\frac{8}{9}$ dello sciame stavano a guardare ed uno degli insetti volteggiava intorno al viso del drago, richiamato dal ronzio di un altro dei suoi compagni che era rimasto impigliato nel pelo del drago. Quanti insetti formavano lo sciame?

Bastiano emise un grido soffocato di spavento.

Problema 1.8. Il segreto di Ygramul

Un grido di spavento echeggiò sopra l'abisso e fu raccolto dall'eco che lo sospinse avanti e indietro. Ygramul non osò attaccare Atreiu perché indossava l'Auryn. "Come faccio a raggiungere l'Oracolo Meridionale?", chiese Atreiu. "Il veleno di Ygramul", disse una voce ronzante, "uccide nello spazio di un'ora, ma al tempo stesso conferisce a chi lo porta in corpo la possibilità di trasferirsi all'istante in qualunque regione di Fantàsia ch'egli desideri, se riesce a risolvere un enigma." Atreiu decise di farsi pungere. Mentre il veleno entrava in circolo sentì la voce ronzante chiedere "In una circonferenza di raggio 10000 m, calcola il rapporto tra l'area del poligono regolare inscritto di 2014 lati e il perimetro del poligono regolare inscritto di 1007 lati".

Ma era davvero soltanto una storia? Com'era possibile che Ygramul e Atreiu avessero udito il suo grido di spavento?

Problema 1.9. I bisolitari

Atreiu si risvegliò vicino al drago della fortuna in un luogo molto distante dalla tana di Ygramul. "Tutto a posto, tutto a posto", rispose una vocetta femminile, "Non preoccuparti, ragazzino mio. Guarirà. Guarirete entrambi. Il peggio ormai lo avete passato. Bevi, ora, bevi!" Atreiu bevve ancora un sorso dalla coppa offertagli e subito cadde in un dormiveglia ristoratore. Sentì un'altra voce maschile più bassa e profonda lamentarsi: "Ma dove è finito il mio libro? Urgula, è mai possibile che tu metta i miei 4 libri di Storie di Fantàsia, 5 di Calcolo Fantàsico e 8 sull'Oracolo Meridionale, sempre sulla libreria in modo che non ci siano 2 libri sull'Oracolo attaccati? In quanti modi diversi riesci a farlo?".

Il campanile batté le due.

Problema 1.10. Le tre porte magiche

Una volta sveglio e guarito, Atreiu conobbe Enghivuc e Urgula. Enghivuc si presentò come il maggior esperto sull'Oracolo Meridionale, e gli spiegò che per giungere a parlare con l'oracolo occorreva superare le prove delle sfingi a guardia delle tre porte. Per verificare se Atreiu era in grado di affrontare la sfida, gli chiese: "se

$$x_n = 1 + 2 + \cdots + n, \qquad y_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n \qquad \text{e} \qquad z_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$$

quanto vale z_{20}?"

Bastiano tolse dalla cartella il resto del suo pane e la mela e mangiò tutto.

Problema 1.11. La prima porta: aritmetica

La prima sfinge chiese ad Atreiu di calcolare la somma delle cifre di

$$(2\underbrace{000\ldots000}_{2012 \text{ zeri}}12)^4.$$

Problema 1.12. La seconda porta: geometria

La seconda sfinge fece trovare ad Atreiu un parallelepipedo di marmo. Disse che se si univano i centri di tre facce del parallelepipedo aventi un vertice in comune, si sarebbe ottenuto un triangolo di lati 11, 20 e 21 metri. La sfinge voleva sapere il volume del parallelepipedo (in m^3).

Problema 1.13. La terza porta: algebra

La terza sfinge fu lapidaria. Non avrebbe fatto passare chi non avesse saputo quanti termini non simili ha lo sviluppo algebrico di $(x + y + z)^{2012} + (x - y - z)^{2012}$. (Dare come risposta le ultime 4 cifre del numero trovato.)

Il campanile batté le quattro.

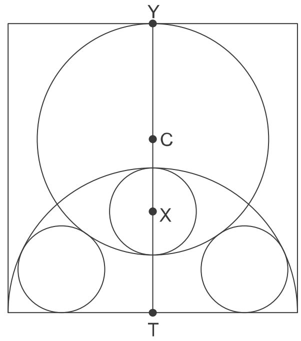
Problema 1.14. La voce del silenzio

L'oracolo parlò e chiese ad Atreiu se sapeva qual era il più piccolo numero primo di 4 cifre, tutte diverse, che fosse uguale alla somma di due quadrati perfetti e, quando Atreiu rispose, gli rivelò che l'imperatrice aveva bisogno di un nome, e che solo gli esseri umani potevano darglielo entrando nel mondo di Fantàsia. Atreiu chiese dove potesse trovarlo questo essere umano e l'oracolo, prima di congedarsi, gli rivelò che gli uomini si trovano oltre i confini di Fantàsia.

"Come vorrei aiutarla", pensò Bastiano, "aiutare lei e anche Atreiu. Cercherei di inventare un nome bellissimo. Se soltanto sapessi come arrivare fino ad Atreiu! Ci andrei subito. Chissà che occhi farebbe se mi vedesse comparire all'improvviso. Ma purtroppo è impossibile. O forse no?"

Problema 1.15. I confini di Fantàsia

Atreiu partì in groppa a Fùcur, il drago volante, e viaggiò per molti giorni e notti. L'unica indicazione che aveva era un disegno fatto da un viandante. Il viaggiatore



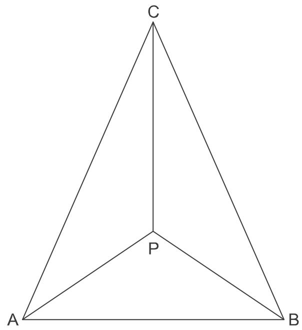
aveva disegnato un quadrato, una semicirconferenza e quattro circonferenze (tre uguali di raggio r ed una più grande di raggio R) tra loro tutte tangenti, come in figura. T rappresentava il centro di Fantàsia, la Torre d'Avorio, X era la posizione in cui Atreiu aveva incontrato il viandante e Y rappresentava il confine da raggiungere. Quanto valeva il rapporto $\frac{r}{R}$ moltiplicato per 1000? Purtroppo, quando Atreiu incontrò i venti del Nord, del Sud, dell'Est e dell'Ovest, questi gli rivelarono che Fantàsia non aveva confini.

Il campanile batté le cinque.

Problema 1.16. La città dei fantasmi

La tempesta scatenata dai 4 venti disarcionò Atreiu e lo allontanò dal suo drago della fortuna. Atreiu si risvegliò ai bordi di una città diroccata, ai margini del nulla che avanzava verso di essa. Cominciò a camminare verso un edificio, quando vide un enorme lupo mannaro legato con una catena. "Io sono Mork", ruggì il lupo "sono stato mandato dal nulla per trovare il ragazzo che sa quanti sono i sottoinsiemi di 7 elementi di $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ per i quali la somma degli elementi è un multiplo di 3, per ucciderlo." Atreiu capì che Mork cercava lui. Decise di affrontarlo e si rivelò urlandogli in faccia la risposta.

Problema 1.17. Il volo verso la torre d'avorio



Fùcur ritrovò Atreiu e riuscì a strapparlo da morte certa, mentre il nulla stava per divorare l'intera città. Insieme decisero di volare direttamente dall'Infanta Imperatrice. La torre d'avorio doveva trovarsi all'interno del triangolo ABC. Fùcur ricordava di aver volato da P a C per 30 km da P ad A e da P a B per $10\sqrt{3}$ km e che AP bisecava l'angolo $C\hat{A}B$ e BP bisecava l'angolo $A\hat{B}C$. Quanto misurava l'area del triangolo in km^2?

Problema 1.18. L'infanta imperatrice

H	H	H	H	H	H
H	A	A	A	A	H
H	A	N	N	A	H
H	A	N	N	A	H
H	A	A	A	A	H
H	H	H	H	H	H

Atreiu giunse alla Torre d'Avorio e disse all'imperatrice che per guarirla era necessario trovarle un nuovo nome. Rimase sorpreso nell'apprendere che lei già lo sapeva. "Tu dovevi portare con te un essere umano e lo hai fatto. Egli sta leggendo di noi, in questo momento. Ora deve solo decidere di darmi un nuovo grande nome. L'ultimo umano mi chiamò HANNAH, e mi fece dono di questo quadro, dove il mio nome poteva essere letto numerose volte. Intanto che lui decide di darmi un nuovo nome, in quanti modi diversi riesci a leggerlo passando da una lettera ad un'altra adiacente, anche in diagonale?".

"Verrei tanto volentieri ad aiutarvi, se soltanto sapessi come fare!
Non so la strada, Atreiu, credimi, non la so proprio."

Problema 1.19. Il vecchio della montagna vagante
Ma Bastiano non si decideva, e così l'Imperatrice dovette recarsi dal Vecchio della Montagna Vagante, il cui compito era di scrivere la storia sul libro. L'Infanta chiese al vecchio di leggerle il libro e costui si sottomise alla volontà dell'Imperatrice e cominciò a leggerle la Storia Infinita iniziando dal principio. Ogni pagina iniziava con un numero reale che, a parte il primo, era dato dal prodotto, diminuito di 1, del valore precedente con il successivo. Il secondo valore letto era 2011. Per quanti diversi valori della prima pagina, da qualche parte nella sequenza infinita, compariva il numero 2012?

Mentre Bastiano leggeva queste parole e al tempo stesso udiva la voce fonda del Vecchio della Montagna Vagante, cominciò a sentire un gran ronzio nelle orecchie e gli occhi gli si colmarono di bagliori.
All'improvviso si mise a gridare: "Fiordiluna! Arrivo!"

Problema 1.20. Una nuova Fantàsia
Un seme... ecco quello che era rimasto di Fantàsia. Tutto, però, poteva rinascere dai sogni di Bastiano. Fiordiluna, così Bastiano aveva chiamato l'imperatrice e quello sarebbe stato il suo nome fino a che un altro uomo non le avesse dato una nuova vita ed un nuovo nome. Fiordiluna consegnò a Bastiano l'Auryn e lo invitò ad esprimere i suoi desideri. Poi chiese a Bastiano "Se $P(n)$ è il prodotto delle cifre del numero naturale n, qual è il prodotto di tutti i numeri naturali verificanti l'equazione $P(n) = n^2 - 42n + 440$?"

Prima di tornare a casa, Bastiano visse molte altre avventure, ma queste le potrai vivere solamente leggendo il libro e vivendo tu, in prima persona le avventure di Atreiu.

11. Soluzioni

11.1 La storia infinita

Risultati dei problemi

1.1. Fantàsia in pericolo	732	91%
1.2. La chiamata di Atreiu	1006	96%
1.3. Sulle tracce di Atreiu	371	71%
1.4. Il bisonte di porpora	7071	92%
1.5. La vecchissima Morla	671	55%
1.6. Il profondo abisso	17	42%
1.7. Ygramul, le molte	72	65%
1.8. Il segreto di Ygramul	5000	23%
1.9. I bisolitari	5670	15%
1.10. Le tre porte magiche	8855	39%
1.11. La prima porta: aritmetica	76	46%
1.12. La seconda porta: geometria	8640	34%
1.13. La terza porta: algebra	4049	5%
1.14. La voce del silenzio	1049	27%
1.15. I confini di Fantàsia	375	4%
1.16. La città dei fantasmi	12	46%
1.17. Il volo verso la torre d'avorio	565	15%

1.18.	L'infanta imperatrice	3468	30%
1.19.	Il vecchio della montagna vagante	4	9%
1.20.	Una nuova Fantàsia	8640	25%

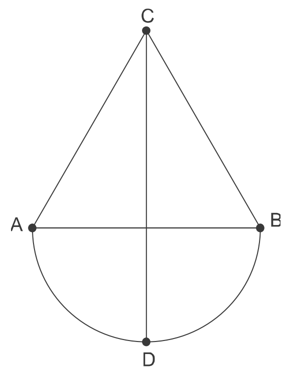
Soluzione al problema 1.1. Fantàsia in pericolo

Il segmento CD è la somma del raggio della semicirconferenza e dell'altezza del triangolo. Detto x il lato cercato, il problema si traduce nell'equazione

$$\frac{x}{2}\sqrt{3} + \frac{x}{2} = 1\,,$$

che risolta dà come soluzione

$$x = \sqrt{3} - 1 \simeq 0{,}7321\,\mathrm{m} = 732{,}1\,\mathrm{mm}\,.$$



[Risposta: 732]

Soluzione al problema 1.2. La chiamata di Atreiu

Ricavando a dalla prima relazione e sostituendo nella seconda si ottiene

$$\frac{a+2012}{2b+2} = \frac{2012b+2012}{2(b+1)} = \frac{2012(b+1)}{2(b+1)} = 1006\,.$$

[Risposta: 1006]

Soluzione al problema 1.3. Sulle tracce di Atreiu

Partendo da 2012, il numero 17 si ottiene calcolando $2^3 + 0^3 + 1^3 + 2^3 = 17$. Sommando i cubi delle cifre di 17 si ottiene $1^3 + 7^3 = 344$, e poi $3^3 + 4^3 + 4^3 = 155$. Con un po' di pazienza, facendo i conti, si osserva che dopo dieci passaggi il numero rimane lo stesso, infatti $3^3 + 7^3 + 1^3 = 371$.

1) 2012	2) 17	3) 344	4) 155	5) 251
6) 134	7) 92	8) 737	9) 713	10) 371

La soluzione è 371.

[Risposta: 371]

Soluzione al problema 1.4. Il bisonte di porpora

Dimostriamo che la diagonale minima si ottiene quando il rettangolo ha i lati tutti uguali, cioè nel caso del quadrato. Siano $5-x$ e $5+x$ le due dimensioni del rettangolo così il perimetro è effettivamente 20 m. La misura della diagonale risulta essere $d = \sqrt{(5-x)^2 + (5+x)^2} = \sqrt{50 + 2x^2}$ che ha il minimo per $x = 0$, cioè quando il rettangolo è un quadrato di lato 5 m. La diagonale misura $5\sqrt{2}\,\mathrm{m} \simeq 7071\,\mathrm{mm}$.

[Risposta: 7071]

Soluzione al problema 1.5. La vecchissima Morla

[Risposta: 671]

Ogni numero naturale può essere scritto nella forma $6q + r$, con $q \geq 0$ e $0 \leq r \leq 5$ in modo unico. Ora $M.C.D.(6, 6q + r) = 1$ se e solo se $r = 1$ oppure $r = 5$.
Con le limitazioni del problema, $6q + 1 \leq 2012$ ha 336 soluzioni possibili ($0 \leq q \leq 335$), mentre $6q + 5 \leq 2012$ ne ha una in meno ($0 \leq q \leq 334$), per un totale di 671 valori possibili.

Soluzione al problema 1.6. Il profondo abisso

Sia $m = 100a + 10b + c$ il primo numero e sia di conseguenza $n = 100c + 10b + a$ il numero ottenuto invertendo le tre cifre. Necessariamente si ha che $a \neq 0$ e $c \neq 0$. Quindi

$$m - n = 99a - 99c = 99(a - c)\,.$$

Quali casi possono presentarsi? Il più grande valore possibile per $m - n$ si avrà quando $a = 9$ e $c = 1$, mentre il valore più piccolo si avrà invertendo i due valori. Vi sono in tutto 17 possibilità.

[Risposta: 17]

Soluzione al problema 1.7. Ygramul, le molte

Prima soluzione.
Impostiamo l'equazione che traduce il testo del problema:

$$\sqrt{\frac{x}{2}} + \frac{8}{9}x + 2 = x\,.$$

Cioè

$$\sqrt{\frac{x}{2}} = \frac{1}{9}x - 2\,.$$

Elevando al quadrato

$$\frac{x}{2} = \frac{1}{81}x^2 + 4 - \frac{4}{9}x$$

che semplificata porta a

$$2x^2 - 153x + 648 = 0\,.$$

Le due soluzioni sono $x_1 = 72$ e $x_2 = \frac{9}{2}$ di cui solo la prima è accettabile.

Seconda soluzione.
Il numero cercato deve essere un numero naturale n. Affinché anche i suoi $\frac{8}{9}$ sia un numero naturale, n deve essere divisibile per 9. Inoltre, affinché la radice quadrata della sua metà sia anch'essa un numero naturale, bisogna che n sia pari e la sua metà sia un quadrato perfetto. Complessivamente n deve contenere un fattore 18 e quel che resta deve essere un quadrato perfetto, quindi deve essere della forma $18k^2$.

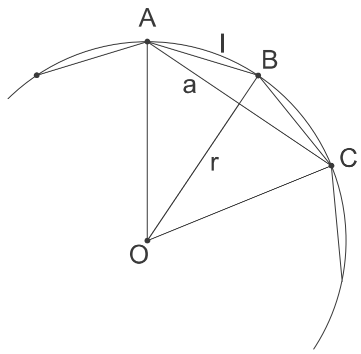
La radice della sua metà è quindi $3k$ e i suoi $\frac{8}{9}$ è $16k^2$. Inoltre ci sono i due insetti rimanenti. Si perviene così all'equazione

$$3k + 16k^2 + 2 = 18k^2 \,.$$

Risolvendo l'equazione si trova che l'unica soluzione intera è $k = 2$, da cui si ottiene che il valore cercato è $n = 18 \cdot 2^2 = 72$.

[Risposta: 72]

Soluzione al problema 1.8. Il segreto di Ygramul



Risolviamo il problema nel caso generico di un poligono di $2n$ lati inscritto in una circonferenza di raggio r.

Consideriamo il quadrilatero $ABCO$ formato da due raggi e da due lati del poligono dato e sia a la lunghezza del segmento AC lato del poligono di n lati.

Essendo $OB \perp AC$, l'area del poligono di $2n$ lati è data da:

$$A_{2n} = n \cdot \frac{a \cdot r}{2} \,.$$

Mentre il perimetro del poligono di n lati è dato da

$$2p_n = n \cdot a \,.$$

Ne segue che il rapporto richiesto non dipende dal numero dei lati e vale

$$\frac{A_{2n}}{2p_n} = \frac{\frac{nar}{2}}{na} = \frac{r}{2} \,.$$

La risposta al problema è 5000.

[Risposta: 5000]

Soluzione al problema 1.9. I bisolitari

Immaginiamo di mettere sullo scaffale prima i libri di Storie e di Calcolo, che possiamo fare in $\frac{9!}{5! \cdot 4!}$ modi possibili. Ora dobbiamo sistemare gli otto libri dell'Oracolo. Per soddisfare la richiesta del problema, possiamo inserire un libro tra due libri già posizionati, oppure all'inizio o alla fine della sequenza. Tra le dieci possibilità ne dobbiamo scegliere otto, cosa che possiamo fare in $\binom{10}{8}$ modi.

In totale avremo $\frac{9!}{5! \cdot 4!} \cdot \binom{10}{8} = 5670$ modi di disporre i libri.

[Risposta: 5670]

Soluzione al problema 1.10. Le tre porte magiche

Prima soluzione.
Osserviamo che

$$
\begin{aligned}
x_n &= \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}\,, \\
y_n &= \sum_{i=1}^{n} \frac{i(i+1)}{2} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(i^2+i) \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right] \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)}{6}
\end{aligned}
$$

e infine

$$
\begin{aligned}
z_n &= \sum_{i=1}^{n} \frac{i(i+1)(i+2)}{6} \\
&= \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n}\left(i^3+3i^2+2i\right) \\
&= \frac{1}{6}\left[\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2+3\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+2\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right] \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24}
\end{aligned}
$$

Per il nostro problema

$$z_{20} = \frac{20\cdot 21\cdot 22\cdot 23}{24} = 8855\,.$$

Seconda soluzione.
Gli x_i sono i numeri triangolari, che occupano la terza diagonale del triangolo di Tartaglia, mentre gli y_i sono i numeri tetraedrici che occupano la quarta diagonale. Gli z_i, essendo somme di numeri tetraedrici occupano sul triangolo di Tartaglia la quinta diagonale.
La somma di una qualunque diagonale, può essere calcolata con la regola della mazza da hockey: nel nostro caso

$$z_{20} = \binom{3}{3}+\binom{4}{3}+\cdots+\binom{22}{3} = \binom{23}{4} = 8855\,.$$

[Risposta: 8855]

Soluzione al problema 1.11. La prima porta: aritmetica
Riscriviamo il problema in maniera diversa:

$$\left(2 \cdot 10^{2014} + 12\right)^4 \,,$$

che possiamo sviluppare come potenza di binomio:

$$\begin{aligned}\left(2 \cdot 10^{2014} + 12\right)^4 &= \left(2 \cdot 10^{2014}\right)^4 + 4 \cdot \left(2 \cdot 10^{2014}\right)^3 \cdot 12 + \\ &\quad + 6 \cdot \left(2 \cdot 10^{2014}\right)^2 \cdot 12^2 + 4 \cdot \left(2 \cdot 10^{2014}\right) \cdot 12^3 + 12^4 \\ &= 16 \cdot 10^{8056} + 384 \cdot 10^{6042} + 3456 \cdot 10^{4028} + \\ &\quad + 13\,824 \cdot 10^{2014} + 20\,736 \,.\end{aligned}$$

Il numero è formato da numerosi zeri e dalle cifre appena calcolate:

$$1600\ldots0038400\ldots00345600\ldots001382400\ldots0020736\,,$$

la somma delle cui cifre è 76.

[Risposta: 76]

Soluzione al problema 1.12. La seconda porta: geometria
Siano $2x$, $2y$ e $2z$ le dimensioni del parallelepipedo.
Le informazioni date dal problema possono essere scritte sotto forma di sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 11^2 \\ x^2 + z^2 = 20^2 \\ y^2 + z^2 = 21^2 \end{cases}$$

Sommando le tre equazioni e dividendo per 2 si ottiene $x^2 + y^2 + z^2 = 481$.
Sottraendo da quest'ultima relazione ciascuna delle precedenti si ottiene

$$\begin{cases} x^2 = 40 \\ y^2 = 81 \\ z^2 = 360 \end{cases}$$

La soluzione cercata è

$$\begin{cases} x = 2\sqrt{10} \\ y = 9 \\ z = 6\sqrt{10} \end{cases}$$

Il volume richiesto è $\mathcal{V} = 2x \cdot 2y \cdot 2z = 8640\,\mathrm{m}^3$.

[Risposta: 8640]

Soluzione al problema 1.13. La terza porta: algebra

Prima soluzione.

$(x+y+z)^{2012}$ ha termini algebrici nella forma di $a_{ijk} \cdot x^i y^j z^k$ con $i+j+k=2012$. Anche $(x-y-z)^{2012}$ ha termini algebrici nella forma $a_{ijk} \cdot x^i(-y)^j(-z)^k$ con $i+j+k=2012$. I termini che si semplificano tra i due polinomi sono quelli in cui uno tra j e k, ma non entrambi, è dispari. I termini che rimarranno alla fine, sommandosi sono di due tipi:

- i, j e k tutti pari: $2\overline{\imath}+2\overline{\jmath}+2\overline{k}=2012$ cioè $\overline{\imath}+\overline{\jmath}+\overline{k}=1006$ che sono $\binom{1008}{2}=507\,528$;
- i pari e j e k dispari: $2\overline{\imath}+2\overline{\jmath}+1+2\overline{k}+1=2012$ cioè $\overline{\imath}+\overline{\jmath}+\overline{k}=1005$ che sono $\binom{1007}{2}=506\,521$.

In totale vi saranno $1\,014\,049$ termini algebrici.

Seconda soluzione.

Sviluppando l'espressione

$$(x+(y+z))^{2012}+(x-(y+z))^{2012}$$

si ottengono 1007 termini della forma $A_i x^i (y+z)^{2012-i}$ con i pari $(0 \leq i \leq 2012)$, perché i termini con i dispari si cancellano dato che nelle due potenze di binomio hanno segno opposto.

Sviluppiamo la potenza del binomio $(y+z)$ con esponente k (dove k è un numero pari compreso fra 0 e 2012). I suoi termini saranno della forma $y^j z^{k-j}$ e verranno tutti moltiplicati per x^k. I termini ottenuti dagli sviluppi delle altre potenze di $(y+z)$ potranno contenere le stesse potenze di y e z ma non di x. Quindi si ottengono tutti termini non simili.

Il primo sviluppo, con esponene 2012, è formato da 2013 termini; il secondo, con esponente 2010, è formato da 2011 termini e così via fino allo sviluppo con esponente zero che è formato da un solo termine. Quindi il loro numero complessivo è dato da

$$2013+2011+2009+\cdots+3+1$$

ovvero la somma dei primi 1007 numeri dispari che è uguale a $1007^2=1\,014\,049$.

[Risposta: 4049]

Soluzione al problema 1.14. La voce del silenzio

Analizziamo come si comportano i quadrati dei numeri modulo 4:

n	n^2	n^2 mod 4
1	1	1
2	4	0
3	9	1
4	16	0
5	25	1

n	n^2	n^2 mod 4
6	36	0
7	49	1
8	64	0
9	81	1
...	...	...

Per essere primo ed essere somma di due quadrati, il numero deve essere congruo a 1 modulo 4.

Partendo da 1001, scriviamo i candidati possibili e scartiamo quelli che hanno almeno due cifre uguali o non sono primi:

1001	2 cifre uguali
1005	2 cifre uguali
1009	2 cifre uguali
1013	2 cifre uguali
1017	2 cifre uguali
1021	2 cifre uguali
1025	divisibile per 5
1029	divisibile per 3
1033	2 cifre uguali
1037	divisibile per 17
1041	2 cifre uguali
1045	divisibile per 5
1049	primo e uguale a $5^2 + 32^2$

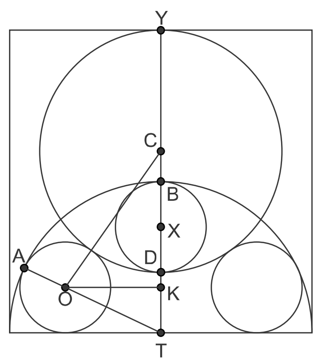
[Risposta: 1049]

Soluzione al problema 1.15. I confini di Fantàsia

Sia 1 il lato del quadrato. Per risolvere il problema è necessario trovare due relazioni tra R e r.

La prima è data dal segmento TY che può essere scritto $TY = DY - DB + TB = 2R - 2r + \frac{1}{2} = 1$.

La seconda si ottiene scrivendo in due modi diversi la misura del segmento OK (vedi figura). Infatti $CO = R+r$, $CK = 1 - R - r$, $OT = \frac{1}{2} - r$ e $KT = r$.



Applicando il teorema di Pitagora risulta $CO^2 - CK^2 = OT^2 - KT^2$ da cui segue

$$(R+r)^2 - (1-R-r)^2 = \left(\frac{1}{2} - r\right)^2 - r^2\,,$$

che semplificata porta alla relazione $2R + 3r = \frac{5}{4}$.
Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 2R + 3r = \frac{5}{4} \\ 2R - 2r = \frac{1}{2} \end{cases}$$

si ottengono le soluzioni $r = \frac{3}{20}$ e $R = \frac{8}{20}$. Il rapporto cercato è dunque $1000\frac{r}{R} = \frac{3}{8} \cdot 1000 = 375$.

[Risposta: 375]

Soluzione al problema 1.16. La città dei fantasmi
Riscriviamo i termini di A modulo 3: $A = \{1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 0\}$.
Siccome la somma di tutti e nove gli elementi è un numero congruo a 0 modulo 3, i due elementi che devono essere tolti per formare un sottoinsieme di 7 elementi deve essere ancora congruo a 0 modulo 3. Abbiamo due sole possibilità:

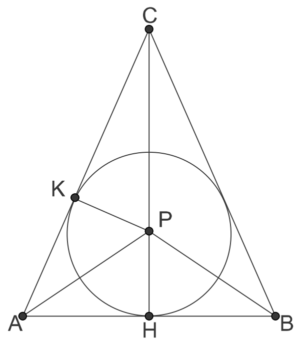
- I due valori sono entrambi congrui a 0: ci sono $\binom{3}{2} = 3$ possibili scelte;
- I due valori sono uno congruo a 1 e l'altro congruo a 2 modulo 3: ci sono $3 \cdot 3 = 9$ possibili scelte.

Vi sono in tutto 12 sottoinsiemi che verificano le condizioni richieste.

[Risposta: 12]

Soluzione al problema 1.17. Il volo verso la torre d'avorio

<u>Prima soluzione.</u>
Per semplicità di calcolo semplifichiamo i dati dividendoli per 10. P risulta essere l'incentro del triangolo ABC. Sia $x = PH = PK$ il raggio della circonferenza inscritta nel triangolo. Applicando il teorema di Pitagora risulta che $AH = AK = \sqrt{3 - x^2}$ e $CK = \sqrt{9 - x^2}$. Applicando ora il teorema di Pitagora al triangolo ACH si ottiene



$$\left(\sqrt{3-x^2} + \sqrt{9-x^2}\right)^2 = \left(\sqrt{3-x^2}\right)^2 + (3+x)^2\,.$$

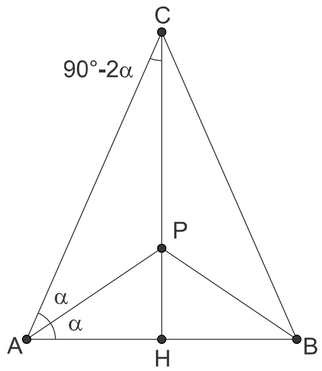
Risolvendo e semplificando si ottiene l'equazione $6x^3 + 21x^2 - 27 = 0$ che ha come soluzioni $x = 1$, $x = -3$ e $x = -\frac{3}{2}$ di cui solo la prima è accettabile.

Ne segue che l'area cercata è

$$\mathcal{A} = \frac{AB \cdot CH}{2} = \frac{2\sqrt{2} \cdot 4}{2} = 4\sqrt{2}\,\mathrm{km}^2.$$

Non dimentichiamo di moltiplicare il risultato per 100 per la semplificazione iniziale Il valore cercato è quindi $\mathcal{A} = 400\sqrt{2} \simeq 565,68\,\mathrm{km}^2$.

<u>Seconda soluzione.</u>
Semplifichiamo i dati per 10 e sia $\alpha = C\hat{A}P = P\hat{A}H$.
Applicando il teorema dei seni al triangolo ACP si ottiene



$$\frac{3}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{\operatorname{sen}(90^\circ - 2\alpha)}$$

$$3\cos 2\alpha = \sqrt{3}\operatorname{sen}\alpha$$

$$6\operatorname{sen}^2\alpha + \sqrt{3}\operatorname{sen}\alpha - 3 = 0$$

la cui unica soluzione accettabile $\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Ora $PH = AP \cdot \operatorname{sen}\alpha = 1$. Di conseguenza $AH = \sqrt{2}$, da cui segue immediatamente che $\mathcal{A} = \frac{AB \cdot CH}{2} = 4\sqrt{2}$.
Il valore cercato è quindi $\mathcal{A} = 400\sqrt{2} \simeq 565,68\,\mathrm{km}^2$.

[Risposta: 565]

Soluzione al problema 1.18. L'infanta imperatrice

H	H	H	H	H	H
H	A	A	A	A	H
H	A	N	N	A	H
H	A	N	N	A	H
H	A	A	A	A	H
H	H	H	H	H	H

Osserviamo che HANNAH è palindromo e che quindi i modi per leggere HAN sono tanti quanti quelli per leggere NAH. Ragioniamo su NAH. Scelta una N, si passa ad una A in 5 possibili modi, mentre da una A ad una H in 3 modi, tranne per quella nell'angolo che ne ha 5. Per un totale di 17 possibilità. Ora vi sono 4 possibili scelte per N e da una N ad un'altra si passa in 3 modi. In totale avremo $17 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 17 = 3468$ modi per leggere HANNAH.

[Risposta: 3468]

Soluzione al problema 1.19. Il vecchio della montagna vagante

Sia a il primo numero e ricaviamo gli altri della sequenza applicando la regola data. Sia c il terzo numero. Esso deve soddisfare l'equazione

$$a \cdot c - 1 = 2011, \qquad \text{cioè} \qquad c = \frac{2012}{a}.$$

Il quarto, d, risulta essere

$$2011d - 1 = \frac{2012}{a}, \qquad \text{cioè} \qquad d = \frac{a + 2012}{2011a}.$$

Il quinto, e, risulta essere

$$\frac{2012}{a}e - 1 = \frac{a+2012}{2011a}, \qquad \text{cioè} \qquad e = \frac{a+1}{2011}\,.$$

Il sesto, f, risulta essere

$$\frac{a+2012}{2011a}f - 1 = \frac{a+1}{2011}, \qquad \text{cioè} \qquad f = a\,.$$

Quindi la sequenza ricomincia dal primo elemento.
Verifichiamo che l'elemento successivo corrisponde al secondo: il settimo, g, risulta essere

$$\frac{a+1}{2011}g - 1 = a, \qquad \text{cioè} \qquad g = 2011\,,$$

quindi la sequenza è composta da soli cinque numeri che si ripetono ciclicamente. Siccome il secondo numero è fissato dal problema, solo gli altri quattro possono valere 2012, ciascuno per una scelta diversa e opportuna di a.

[Risposta: 4]

Soluzione al problema 1.20. Una nuova Fantàsia
Dimostriamo che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $P(n) < n$.
Sia $n = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0$. Osserviamo che

$$P(n) = a_k \cdot a_{k-1} \cdots a_1 \cdot a_0 \leq a_k \cdot 10 \cdots 10 = a_k \cdot 10^k \leq n\,.$$

Risolviamo la disequazione $n^2 - 42n + 440 \leq n$, cioè $n^2 - 43n + 440 \leq 0$ le cui soluzioni intere sono $16 \leq n \leq 26$.
A questo punto basta verificare che tra i pochi numeri naturali trovati solo 18, 20 e 24 verificano l'uguaglianza iniziale. La soluzione richiesta è $18 \cdot 20 \cdot 24 = 8640$.

[Risposta: 8640]