# Nota Introduttiva

Credo che per utilizzare al meglio questo libro sia utile sapere come è stato scritto.

Per prima cosa all'inizio non era nemmeno un libro, ma forse questo succede quasi sempre.

Inizialmente era solo un promemoria molto schematico per uso personale: una lista di problemi che usavo per le mie lezioni di Combinatoria, quando venivo invitato come docente ad uno stage per le **Olimpiadi della Matematica**.

Bisogna sapere che una delle difficoltà di questi stages è l'estrema eterogeneità degli studenti, che vanno dal principiante assoluto, al quale bisogna insegnare proprio tutto, al campioncino locale, stanco di riascoltare l'ennesima lezione che parte da zero.

La soluzione che ho adottato (nel caso della lezione di Combinatoria) è stata la seguente: all'inizio fornisco, senza dimostrazione, solo le due formule per contare gli anagrammi, poi comincio a risolvere tutti i problemi classici della Combinatoria Elementare usando solo queste due formule e un po' di creatività.

Dal punto di vista del principiante questo approccio ha il vantaggio di renderlo operativo fin da subito: capisce che con quelle due formule (e un po' di intelligenza) è già in grado di affrontare la maggior parte dei problemi di combinatoria che trova nelle gare.
D'altra parte anche lo studente esperto non si annoia, perché comunque vede un modo diverso per dimostrare cose che già sapeva.

La mia tipica prima lezione di combinatoria consiste quindi nel risolvere una decina di problemi, del tipo di quelli che, nella prima parte del libro, vanno dal **4** al **11**, facendo vedere ogni volta che, anche se il problema non ha nulla a che fare con gli anagrammi, è possibile trovare una parola il cui conteggio degli anagrammi ne fornisce la soluzione.

Ovviamente nel libro ho conservato questa impostazione ma sono stato più dettagliato: ho aggiunto una sezione dedicata ai conteggi sulle funzioni e ho comunque messo la dimostrazione delle formule degli anagrammi, che nella lezione davo per scontate.

Fatta la lezione, in ogni stage che si rispetti, c'è poi un'esercitazione sullo stesso tema, talvolta in forma di gara a squadre.
Questo è il momento più importante dello stage: mentre il principiante testerà la sua comprensione dell'argomento con problemi molto simili a quelli della lezione, lo studente esperto si divertirà ad affrontare problemi più difficili tra i quali il docente avrà avuto cura di *"nascondere"* anche alcune idee nuove che vuole veicolargli.

Ho ritenuto utile che quest'impostazione fosse conservata anche nel libro: tra i problemi proposti (dei quali viene sempre riportato lo svolgimento) sono spesso nascosti argomenti più tecnici come i numeri di **Catalan** o il concetto di **ciclo** di una permutazione.

Riassumendo questo libro vuole essere sia un supporto alle lezioni di Combinatoria in uno stage di preparazione alle Olimpiadi della Matematica, sia un eventuale sostituto dello stage stesso che il singolo studente può usare per allenarsi da solo.
Ovviamente non è completo: ogni volta che lo rileggo mi accorgo che vorrei aggiungerci qualcosa ma ovviamente bisogna fare delle scelte. Ad esempio non ho toccato, se non in modo marginale, la tecnica dell'approccio ricorsivo e quella del quozientare, perché ho ritenuto che meritassero una pubblicazione a parte che (forse) scriverò.
Ad ogni modo, spero che il lettore troverà comunque spunti interessanti anche se questo libro si limita alla sola Combinatoria Elementare, visto che, come ben sa chi conosce le gare di matematica, "Elementare" non significa "semplice" ma solo "senza prerequisiti".

Buon Divertimento a Tutti.

l'Autore.

[...]

Soluzione di 5. Anche per questo problema c'è un modo naturale di mettere in corrispondenza biunivoca l'insieme da contare con l'insieme di anagrammi di un'opportuna parola.
Osserviamo infatti che per descrivere completamente un percorso basta dire, ad ogni passo, se si va in basso a destra o in basso a sinistra.
Ad esempio, se conveniamo di scrivere **D** per ogni passo in basso a destra e **S** per ogni passo in basso a sinistra, i due percorsi in figura **2** sono rappresentati dalle parole:

**SDSDSDDD** e **DDDSDDSS**

Osserviamo inoltre che ogni percorso che vada dalla casella $(0, 0)$ alla casella $(3, 5)$ deve necessariamente consistere di 3 spostamenti di tipo **S** e 5 di tipo **D**.
Quindi ci aspettiamo che l'insieme di tutti i percorsi tra $(0, 0)$ e $(3, 5)$ sia in corrispondenza biunivoca con l'insieme di tutte le parole di 8 lettere, costituite da 5 lettere **D** e 3 lettere **S**.
Lasciamo al lettore la semplice verifica che la corrispondenza è davvero biunivoca.
Fatto ciò, per contare i percorsi, basterà contare le parole che, come sappiamo, sono $\frac{(5+3)!}{5! \cdot 3!}$, cioè 56.
Procedendo in modo del tutto analogo, nel caso generale si trova che i percorsi che vanno da $(0, 0)$ a $(h, k)$ sono $\frac{(h+k)!}{h! \cdot k!}$.

6. Un papà ha 4 figli e 10 caramelle (identiche). In quanti modi diversi può distribuire le caramelle ai figli? (vanno contati anche i modi "ingiusti" di distribuire le caramelle, come ad esempio dare tutte le caramelle al figlio più giovane e lasciare senza tutti gli altri)
Più in generale, in quanti modi si possono distribuire $n$ caramelle a $k$ bambini?

Soluzione di 6. Anche questo problema, pur in modo meno immediato, può essere ricondotto al problema del calcolo del numero di anagrammi di un'opportuna parola.
Per capire meglio, immaginiamo che i 4 figli si chiamino **Ada**, **Ugo**, **Lea** e **Isa**.
Una possibile distribuzione di caramelle è la seguente:

| Ada | Ugo | Lea | Isa |
|---|---|---|---|
| • • • • | • | • • • | • • |

dove, sotto il nome di ogni figlio, ci sono tanti pallini, quante sono le caramelle che ha ricevuto.

Ora, a partire da essa, formiamo una parola nel modo seguente: partendo dal primo bimbo, e procedendo in sequenza, scriviamo tante lettere **A** quante sono le caramelle date al figlio e scriviamo la lettera **B** ogni volta che passiamo al figlio successivo.
La parola che si ottiene è la seguente:

**AAAABABAAABAA**

Per fare qualche altro esempio, la distribuzione di caramelle:

| Ada | Ugo | Lea | Isa |
|---|---|---|---|
| • • | | • • • • • | • • • |

corrisponde alla stringa di lettere:

**AABBAAAAABAAA**

mentre la distribuzione di caramelle:

| Ada | Ugo | Lea | Isa |
|---|---|---|---|
| | | ● ● ● ● ● | ● ● ● ● ● |

corrisponde alla stringa di lettere:

**BBAAAAABAAAAA**.

In definitiva, ad ogni modo di distribuire le 10 caramelle ai 4 bimbi corrisponde in modo univoco una parola di 13 lettere costituita da 10 lettere **A** e 3 lettere **B**.
Viceversa, ad ogni possibile parola di tale tipo corrisponde in modo univoco un modo di distribuire le caramelle.
Ad esempio, alla stringa di lettere:

**AABAABAAAAAAB**

corrisponde la distribuzione di caramelle:

| Ada | Ugo | Lea | Isa |
|---|---|---|---|
| ● ● | ● ● | ● ● ● ● ● ● | |

Di conseguenza, invece di contare quanti sono i diversi modi di distribuire le caramelle, basta contare quante sono le parole.
Grazie alla solita formula per gli anagrammi, siccome ci sono 10 lettere **A** e 3 lettere **B**, il numero di tali parole è:

$$\frac{13!}{10! \cdot 3!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{3!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 13 \cdot 2 \cdot 11 = 286$$

Più in generale, se i bimbi fossero stati $k$ e le caramelle da distribuire $n$, il numero di modi di distribuirle sarebbe stato $\frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}$ cioè $\binom{n+k-1}{n}$ o, equivalentemente, $\binom{n+k-1}{k-1}$.

**7.** Dispongo di palline di 4 colori diversi: bianche, rosse, verdi e blu. Di ciascun colore ne posso avere tante quante ne voglio. In quanti modi diversi posso riempire un sacchetto con 10 palline? (attenzione: vanno contati anche i casi in cui non vengono usati tutti i colori, ad esempio quando si riempie il sacchetto con 10 palline tutte verdi)
Più in generale, quanti sarebbero stati i modi, se i colori diversi fossero stati $p$ e il sacchetto avesse dovuto essere riempito con $q$ palline?

**Soluzione di 7.** In generale, i diversi modi di mettere insieme una collezione di $q$ oggetti (le palline), scegliendoli tra $p$ diverse categorie (i colori), accettando di poter prendere anche più oggetti della stessa categoria, prendono il nome di **combinazioni con ripetizione** di $p$ oggetti della classe $q$.
In realtà si tratta solo di un altro modo di riformulare il problema **6**.
Anche questa volta cominciamo ragionando sul caso particolare di 10 palline e 4 colori.

Immaginiamo di rappresentare ogni scelta di 10 palline in modo analogo a quanto fatto nella soluzione del problema **6**.
Ad esempio la scelta di 3 palline bianche, 2 rosse, 4 verdi e 1 gialla verrebbe rappresentata nel modo seguente:

| Bianche | Rosse | Verdi | Gialle |
|---|---|---|---|
| • • • | • • | • • • • | • |

Immaginiamo ora di far corrispondere le caramelle date ad Ada alle palline bianche, quelle date ad Ugo alle palline rosse, quelle date a Lea alle palline verdi e quelle date ad Isa alle palline gialle.
Ad esempio, alla precedente configurazione di palline, corrisponde la seguente distribuzione di caramelle:

| Ada | Ugo | Lea | Isa |
|---|---|---|---|
| • • • | • • | • • • • | • |

È evidente che c'è una corrispondenza biunivoca tra l'insieme che dobbiamo contare e l'insieme di tutti i modi diversi di distribuire 10 caramelle a 4 bambini, che abbiamo già contato nella soluzione del problema **6**, trovando che sono $\binom{13}{3}$, cioè 286.
In modo del tutto analogo, se il sacchetto deve contenere $q$ palline e i colori sono $p$, contare in quanti modi diversi lo si può riempire equivale a contare in quanti modi si possono distribuire $q$ caramelle a $p$ bambini.
Dalla soluzione del problema **6** sappiamo già che tali modi sono $\binom{q+p-1}{q}$ o, equivalentemente, $\binom{q+p-1}{p-1}$.

**8.** (Variazione del problema **6.**) Un papà ha 10 caramelle (identiche). In quanti modi diversi può distribuire le caramelle ai suoi 4 figli, senza necessariamente darle tutte (può decidere di distribuirne un numero qualsiasi tra 0 e 10)?
Più in generale, in quanti modi si possono distribuire a $k$ bambini un numero di caramelle variabile tra 0 e $n$?

**Soluzione di 8.** Vi sono essenzialmente 2 modi di risolvere il problema: uno con molti calcoli e uno più astuto.

**I modo.** Se ci si butta fin da subito nei calcoli senza riflettere, si può essere tentati di risolvere il problema distinguendo tutti i casi, calcolando cioè in quanti modi posso distribuire 0 caramelle, in quanti modi 1 caramella, in quanti modi 2 caramelle, e così via, fino ad arrivare a 10 caramelle, sommando poi tutti gli 11 risultati ottenuti.
Più in dettaglio, visto che i modi di distribuire $k$ caramelle a 4 bimbi sono $\binom{k+3}{3}$ (vedi problema **6**), il numero di modi di distribuirne al massimo 10 è dato dalla seguente somma:

$$\binom{3}{3}+\binom{4}{3}+\binom{5}{3}+\binom{6}{3}+\binom{7}{3}+\binom{8}{3}+\binom{9}{3}+\binom{10}{3}+\binom{11}{3}+\binom{12}{3}+\binom{13}{3}. \tag{1}$$

Infatti il primo addendo è appunto il numero di modi di distribuire 0 caramelle a 4 bimbi, il secondo 1 caramella, il terzo 2 caramelle, e così via, fino all'ultimo che è il numero di modi di distribuire tutte e 10 le caramelle ai 4 bimbi.
Divertendosi (!!) a calcolare a mano tale somma si trova come risultato 1001.
Ovviamente, se il numero di caramelle fosse stato più alto, il calcolo manuale della somma (1) sarebbe stato al di là della nostra pazienza.

**II modo.** Se invece ci si sofferma un attimo a riflettere, si scopre che il modo più rapido di risolvere il problema è quello di immaginare che le caramelle non distribuite vengano date ad un quinto figlio fittizio.
Ad esempio, usando le stesse notazioni del problema **6** e immaginando che il nome del figlio fittizio sia *Nemo*, la seguente distribuzione di 7 caramelle ai 4 figli:

| Ada | Ugo | Lea | Isa |
|---|---|---|---|
| • • • | • | • • | • |

corrisponde alla seguente distribuzione di tutte le 10 caramelle a 5 persone:

| Ada | Ugo | Lea | Isa | Nemo |
|---|---|---|---|---|
| • • • | • | • • | • | • • • |

Si stabilisce in tal modo una corrispondenza (che si dimostra facilmente essere biunivoca) tra i modi di distribuire non più di 10 caramelle a 4 figli e i modi di distribuirne esattamente 10 a 5 figli.
Ma queste ultime, ragionando come nel problema **6**, le sappiamo contare: sono $\binom{14}{4}$, cioè 1001.
Si noti che, ragionando in modo identico, si conclude che il numero di modi diversi di distribuire non più di $n$ caramelle a $k$ bambini è uguale al numero di modi di distribuirne esattamente $n$ a $k+1$ bambini, cioè $\binom{n+k}{n}$.

**Osservazione:** I due modi diversi che abbiamo appena visto per risolvere il problema **8** ci suggeriscono uno stratagemma interessante per trovare il risultato di somme simili alla (1) senza fare davvero tutti i calcoli.
Infatti, se ci viene chiesto di calcolare una somma di questo tipo, è sufficiente inventarsi un opportuno problema di caramelle da distribuire a bimbi che abbia tale somma come *"soluzione calcolosa"*. A quel punto, per trovare il risultato basterà risolvere nel modo furbo il problema inventato.
Per chiarire meglio la cosa, vediamo in dettaglio il problema che segue.

**9.** Calcolare, nel modo più breve possibile, la seguente somma:

$$\binom{4}{4}+\binom{5}{4}+\binom{6}{4}+\binom{7}{4}+\ldots+\binom{19}{4}+\binom{20}{4}.$$

**Soluzione di 9.** Osserviamo che:

[...]

**82.** La parola **TRATTORE** ha la seguente proprietà: comunque venga tagliata in 2 pezzi, nel pezzo a sinistra le **T** non sono mai meno delle **R**. Quanti sono i suoi anagrammi che hanno la stessa proprietà?

**83.** Nella tabella $n \times n$ di figura **17** una pulce si trova nella casella in basso a sinistra (evidenziata in grigio scuro) e deve arrivare nella casella in alto a destra (evidenziata in grigio chiaro) facendo una sequenza di $2n-2$ salti tra caselle contigue (cioè aventi un lato in comune). Quante sono le sequenze di salti che, come quella in figura, restano tutte al di sotto della linea nera?

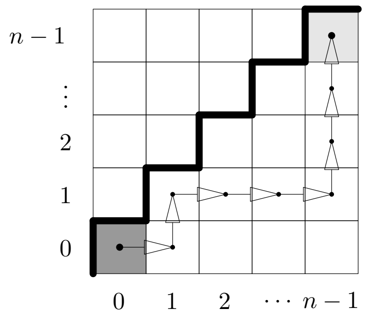


figura 17

**84.** Quante sono le funzioni $f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$ aventi l'immagine costituita esattamente da 3 elementi?

**85.** La parola **MAREMMA** inizia con **M** ma non finisce con **M**. Quanti sono i suoi anagrammi che hanno la stessa proprietà?

**86.** La parola **MAREMMA** contiene la sequenza **MA**, cioè c'è almeno una **M** che è immediatamente seguita da una **A**. Quanti sono i suoi anagrammi che hanno questa proprietà?

[...]

Complessivamente, quindi, i modi di ordinare le carte in modo che non ci siano carte di bastoni vicine, sono in tutto $10! \cdot 30! \cdot \binom{31}{10}$.
Possiamo a questo punto calcolare la probabilità richiesta che è:

$$\mathcal{P} = \frac{10! \cdot 30! \cdot \binom{31}{10}}{40!} = \frac{29 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 23}{38 \cdot 37 \cdot 34 \cdot 4} = \frac{10005}{191216} \approx 0.05$$

che è una probabilità molto bassa: circa il 5%.

`Soluzione di 56.` La risposta corretta è: 160160 per 16 salti, 0 per 17 salti.
Rispetto al problema **19** questo problema ha una difficoltà in più.
Infatti per passare dalla casella di partenza a quella di arrivo basterebbero 14 salti: 7 orizzontali verso destra e 7 verticali verso l'alto.
Ciò significa che, mentre i percorsi lunghi 14 salti contengono necessariamente solo salti verso destra e verso l'alto, quelli lunghi 16 devono contenere anche spostamenti verso il basso o verso sinistra
Ad esempio il seguente percorso di 16 salti contiene anche uno spostamento verso il basso:

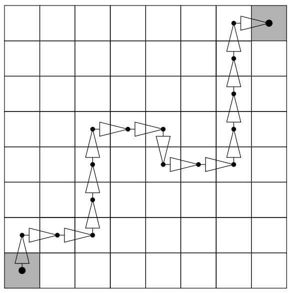

figura 18

Per comodità adottiamo le seguenti notazioni:

$$\begin{array}{rll} \mathbf{A} & \text{significa :} & \text{"}\textit{un passo verso l'alto}\text{"}, \\ \mathbf{B} & \text{significa :} & \text{"}\textit{un passo verso il basso}\text{"}, \\ \mathbf{D} & \text{significa :} & \text{"}\textit{un passo verso destra}\text{"}, \\ \mathbf{S} & \text{significa :} & \text{"}\textit{un passo verso sinistra}\text{"}. \end{array}$$

Con tali notazioni il percorso di figura 18 è rappresentato dalla parola:

$$\mathbf{ADDAAADDBDDAAAAD}.$$

Osserviamo che i percorsi di 16 salti da considerare sono di 2 tipi:

(23) permutazioni di $(8\,\mathbf{A} + \mathbf{B}) + 7\,\mathbf{D}$

(24) permutazioni di $(8\,\mathbf{D} + \mathbf{S}) + 7\,\mathbf{A}$

visto che complessivamente bisogna spostarsi di 7 posizioni sia verso l'alto che verso destra.
Ad esempio quello di figura 18 rientra nella tipologia (23).
Tuttavia non tutti i percorsi ottenuti permutando (23) o (24) sono ammissibili.
Ad esempio il percorso:

$$\mathbf{AAASADDADDADDADD}$$

è di tipo (24) ma non va considerato perché dopo 4 passi esce dalla scacchiera:

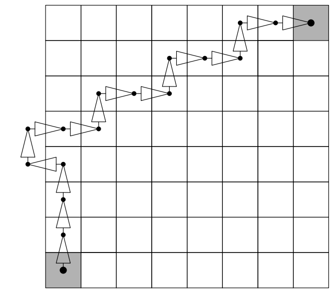

figura 19

Infatti un percorso di tipo (24) esce dalla scacchiera se e solo se il salto di tipo **S** precede (o segue) tutti i salti di tipo **D**. Quindi, tra i percorsi di tipo (24), quelli ammissibili sono tutti e soli quelli in cui, il salto di tipo **S** ha dei salti di tipo **D** sia prima che dopo.
Analogamente, tra i percorsi di tipo (23), quelli ammissibili sono tutti e soli quelli in cui, il salto di tipo **B** ha dei salti di tipo **A** sia prima che dopo.
Si noti che, per ovvi motivi di simmetria, i percorsi ammissibili di tipo (23) sono tanti quanti quelli di tipo (24), e quindi basta contare quelli di uno dei due tipi.
Contiamo quelli di tipo (24), cioè contiamo in quanti modi possiamo costruire una parola utilizzando tutte le 16 lettere di (24) e facendo in modo che la **S** abbia delle **D** sia prima che dopo.
A tale scopo immaginiamo la lista vuota dei 16 posti sui quali distribuire le 16 lettere

$$\overbrace{\sqcup\,\sqcup\,\sqcup\,\sqcup\,\sqcup\,\sqcup\,\sqcup\,\sqcup\,\sqcup\,\sqcup\,\sqcup\,\sqcup\,\sqcup\,\sqcup\,\sqcup\,\sqcup}^{16}$$

e per prima cosa scegliamo i 7 posti in cui piazzeremo le **A**, ad esempio possiamo scegliere i seguenti:

$$\mathbf{A}\sqcup\mathbf{A}\sqcup\sqcup\mathbf{A}\sqcup\sqcup\mathbf{A}\mathbf{A}\sqcup\mathbf{A}\sqcup\sqcup\mathbf{A}\sqcup$$

Tale scelta può essere fatta in $\binom{16}{7}$ modi.
Rimane da contare in quanti modi posso distribuire nei rimanenti 9 posti le 8 lettere **D** e la lettera **S**.
Se non ci fossero ulteriori condizioni i modi sarebbero 9, perché basta scegliere dove va la **S**, ma siccome la **S** deve avere delle **D** sia prima che dopo, vanno eliminati i due modi in cui la **S** occupa la prima o l'ultima casella libera, per cui i modi ammissibili sono solo 7.
Riassumendo: per ognuno dei $\binom{16}{7}$ modi di piazzare le **A** ci sono 7 modi ammissibili di piazzare le lettere rimanenti, quindi i percorsi ammissibili di tipo (24) sono in tutto

$$\binom{16}{7}\cdot 7 = \frac{16\cdot 15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}\cdot 7 = 8\cdot 13\cdot 11\cdot 10\cdot 7 = 80080.$$

Visto che, per ovvi motivi di simmetria, i percorsi di tipo (23) sono tanti quanti quelli di tipo (24), in tutto i percorsi richiesti sono 160160.
Questo conclude il caso in cui i salti sono 16.

Passiamo ora al caso in cui il percorso è di 17 salti e mostriamo che non ci sono percorsi ammissibili per una semplice questione di parità.
Infatti, immaginiamo che le caselle della tabella siano colorate alternativamente di bianco e di nero, come in una scacchiera.
Ogni volta che si fa un salto tra caselle contigue, la casella di partenza e quella di arrivo hanno colori diversi. Di conseguenza lo stesso accade facendo una sequenza di un numero

[...]

In tutto quindi le parole del tipo richiesto sono $150 + 720 + 960 = 1830$.

**Soluzione di 110.** La risposta corretta è: 2402.

Per sviluppare la soluzione in modo più agevole introduciamo qualche notazione.

**N.** Data una sequenza $a_1, a_2, \ldots, a_n$ di numeri reali, presi $k$ indici $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n$, diremo che $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$ è una **catena strettamente crescente** di lunghezza $k$ se e $a_{i_1} < a_{i_2} < \ldots < a_{i_k}$, mentre diremo che è una **catena strettamente decrescente** di lunghezza $k$ se e $a_{i_1} > a_{i_2} > \ldots > a_{i_k}$.

Con tale notazione il nostro problema si può riformulare nel modo seguente:

> *qual è il minimo $n$ tale che ogni permutazione di $\{1, 2, \ldots, n\}$ ha almeno una catena (crescente o decrescente) lunga 50?*

Per mostrare che il minimo è $n = 49^2 + 1 = 2402$ dobbiamo far vedere due cose: la prima è che se $n = 2402$ allora una catena ordinata lunga 50 si trova sempre, la seconda è che quando invece $n$ è più piccolo è sempre possibile esibire una permutazione che non ha catene lunghe 50.
Cominciamo dalla seconda che è più semplice.
Vogliamo mostrare che, più in generale, si può sempre esibire una permutazione di $\{1, 2, \ldots, k^2\}$ che non ha catene ordinate lunghe $k + 1$. Il caso del nostro problema si ottiene per $k = 49$.
Per meglio visualizzare quello che stiamo facendo, ragioniamo prima su un caso piccolo: $k = 3$.
In tal caso si trova che la permutazione

$$3,\ 2,\ 1,\ 6,\ 5,\ 4,\ 9,\ 8,\ 7$$

non ha alcuna catena ordinata lunga 4.
Per rendercene conto separiamola in 3 blocchi:

$$\overbrace{3,\ 2,\ 1,}^{1^o \text{ blocco}}\ \overbrace{6,\ 5,\ 4,}^{2^o \text{ blocco}}\ \overbrace{9,\ 8,\ 7}^{3^o \text{ blocco}}$$

Si noti che gli elementi di ciascun blocco sono in ordine decrescente. Di conseguenza ogni eventuale catena crescente non può avere due elementi nello stesso blocco e quindi gli elementi che la costituiscono non possono essere di più del numero dei blocchi. Ciò significa che la lunghezza di una catena crescente è al massimo 3.
Si noti anche che gli elementi di ciascun blocco sono maggiori di tutti gli elementi dei blocchi che lo precedono e minori di tutti quelli dei blocchi che lo seguono. Ciò significa che ogni eventuale catena decrescente deve essere contenuta tutta nello stesso blocco, e quindi la sua lunghezza è al massimo 3.
Se si è ben compreso il caso $k = 3$ non è difficile affrontare il caso generale.
Consideriamo dunque, già divisa in blocchi, la permutazione di $\{1, 2, \ldots, k^2\}$ avente nel primo blocco i numeri da 1 a $k$ in ordine inverso, nel secondo quelli da $k + 1$ a $2k$, sempre in ordine inverso, e così via fino al $k-$esimo blocco, dove compaiono in ordine inverso gli ultimi $k$ numeri:

$$\overbrace{k,\ k-1, \ldots,\ 2,\ 1,}^{1^o \text{ blocco}}\ \overbrace{2k,\ 2k-1, \ldots,\ k+1,}^{2^o \text{ blocco}}\ \ldots\ \overbrace{k^2,\ k^2-1, \ldots,\ k^2-k+1}^{k^o \text{ blocco}} \tag{81}$$

Anche qui, come prima, all'interno di ciascun blocco gli elementi sono in ordine decrescente e ciò forza ogni eventuale catena crescente ad avere lunghezza non maggiore del numero dei blocchi.

Inoltre, esattamente come prima, gli elementi di ciascun blocco sono maggiori di tutti gli elementi dei blocchi che lo precedono e minori di tutti quelli dei blocchi che lo seguono. Questo forza ogni eventuale catena decrescente ad essere tutta contenuta nello stesso blocco. Quindi ogni catena, crescente o decrescente che sia, è lunga al massimo $k$.
Abbiamo quindi mostrato che se $n = k^2$ è possibile esibire una permutazione di $\{1, 2, \ldots, n\}$ che non ha catene ordinate lunghe $k + 1$.
Questo è ovviamente vero anche se $n < k^2$, visto che basta prendere come permutazione di $\{1, 2, \ldots, n\}$ proprio la (81), ma eliminandone i numeri maggiori di $n$.
Nel caso particolare $k = 49$ otteniamo una delle 2 parti della soluzione del nostro problema: se $n \leq 49^2$ allora esistono permutazioni di $\{1, 2, \ldots, n\}$ che non hanno catene lunghe 50.
Rimane da mostrare che se invece $n = 49^2 + 1$ allora una catena lunga 50 si trova sempre.
Anche stavolta il caso generale richiede la stessa fatica del caso particolare; mostriamo quindi che, in generale, se $n = k^2 + 1$ allora ogni permutazione di $\{1, 2, \ldots, n\}$ ha almeno una catena lunga $k + 1$.
A tale scopo, per ogni $i = 1, \ldots, n$, definiamo $\ell_i$ come la massima lunghezza che può avere una catena crescente che ha $a_i$ come primo elemento. Ad esempio, dire che $\ell_5 = 8$ significa che tra tutte le possibili catene crescenti aventi come primo elemento $a_5$ ce n'è almeno una costituita esattamente da 8 elementi, ma nessuna con 9 o più elementi.
A questo punto, se per un qualche indice $i$ si ha $\ell_i \geq k + 1$ allora abbiamo vinto: infatti in tal caso c'è una catena crescente lunga almeno $k + 1$ che parte da $a_i$.
Se invece così non è, allora i valori possibili per gli $\ell_i$ sono solo $k$ visto che per ogni $i$ si ha $1 \leq \ell_i \leq k$.
Di conseguenza, visto che gli $\ell_i$ sono più di $k^2$, ci saranno almeno $k + 1$ indici $i_1 < i_2 < \ldots < i_k < i_{k+1}$, tali che $\ell_{i_1} = \ell_{i_2} = \ldots = \ell_{i_k} = \ell_{i_{k+1}}$.
Mostriamo che prendendo tutti gli $a_i$ che hanno esattamente quegli indici si ottiene una catena decrescente lunga $k + 1$, cioè:

$$a_{i_1} > a_{i_2} > \ldots > a_{i_k} > a_{i_{k+1}}. \tag{82}$$

Infatti, se così non fosse, esisterebbero due indici $i$ e $j$ tali che:

$$i < j \tag{83}$$
$$a_i < a_j \tag{84}$$
$$\ell_i = \ell_j \tag{85}$$

Ma allora aggiungendo $a_i$ alla catena crescente lunga $\ell_j$ che parte da $a_j$, otterremmo una catena lunga $\ell_j + 1$ che parte da $a_i$. Da ciò seguirebbe che $\ell_i \geq \ell_j + 1$, contraddicendo (85).
Quindi la (82) vale e, di conseguenza, abbiamo trovato una catena decrescente lunga $k + 1$.
Riassumendo: se non ci sono catene crescenti lunghe $k + 1$ allora ce n'è almeno una decrescente lunga $k + 1$, quindi una catena ordinata lunga $k + 1$ c'è sempre.
Per $k = 49$ questo è esattamente ciò che serve per completare la soluzione del nostro problema.