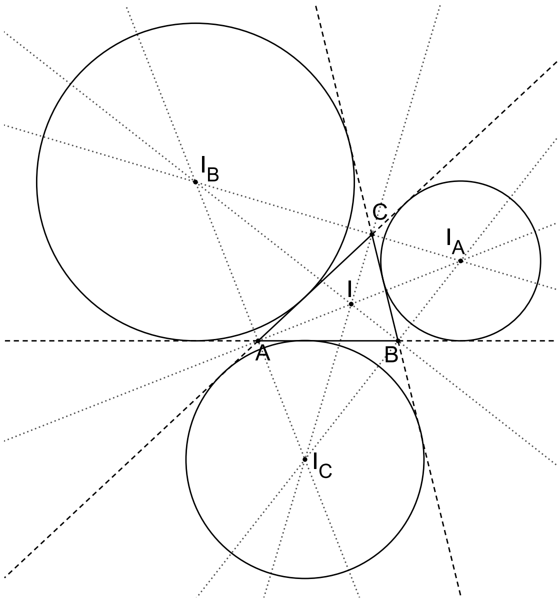
3.2 Excentri e circonferenze ex-inscritte

Definizione 3.4. Sia ABC un triangolo qualunque e α, β e γ i suoi angoli interni nei vertici A, B e C. Si consideri la bisettrice di uno degli angoli, ad esempio α, e le bisettrici degli angoli esterni relativi ai vertici B e C. Il loro punto di intersezione[4] I_A è detto *excentro* del triangolo ed è centro di una circonferenza tangente (esternamente al triangolo) al lato BC e ai prolungamenti degli altri due lati. Questa circonferenza prende il nome di *circonferenza ex-inscritta* ad ABC. Evidentemente ogni triangolo ha tre excentri e tre circonferenze ex-inscritte.



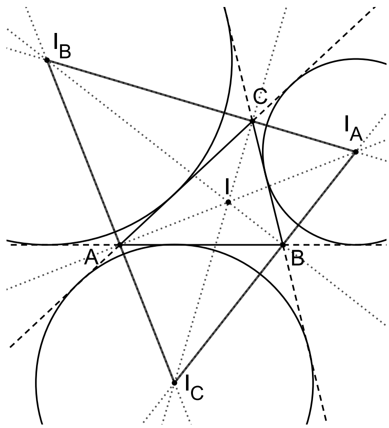
Lemma 3.5. L'incentro I di ABC e i tre excentri I_A, I_B e I_C formano un *sistema ortocentrico*, cioè ciascuno dei punti è l'ortocentro del triangolo formato dagli altri tre punti. Pertanto ABC è il triangolo ortico (Definizione 3.1) di $I_AI_BI_C$ (si veda anche il Problema 26). Tale proprietà è detta *dualità* fra l'ortocentro e gli excentri[5]. Dimostriamo a titolo di esempio una delle proposizioni del lemma appena enunciato.

Esempio 3.3. Dimostrare che l'incentro di un triangolo è l'ortocentro del triangolo formato dai suoi excentri.

[4]La dimostrazione della concorrenza di ciascuna bisettrice interna con le bisettrici esterne è elementare e si può condurre in modo analogo alla dimostrazione dell'esistenza dell'incentro.

[5]Per approfondimenti consultare ad esempio Chen 2016, pag. 61 e segg.

Soluzione. Osserviamo che la retta BI_B è bisettrice dell'angolo interno $\widehat{ABC}$, mentre I_AI_C è bisettrice del corrispondente angolo esterno.



Ma le due bisettrici sono perpendicolari perché l'angolo interno e l'angolo esterno sono supplementari; da ciò segue che BI_B è un'altezza nel triangolo $I_AI_BI_C$. Analogamente si dimostra che anche CI_C e AI_A sono altezze. Il loro punto di intersezione I è quindi l'ortocentro di $I_AI_BI_C$. □

Di seguito sono presentate due formule che legano fra loro i raggi delle circonferenze ex-inscritte con alcuni dati del triangolo di partenza. Sono svolte anche le dimostrazioni, perché costituiscono un utile esercizio[6].

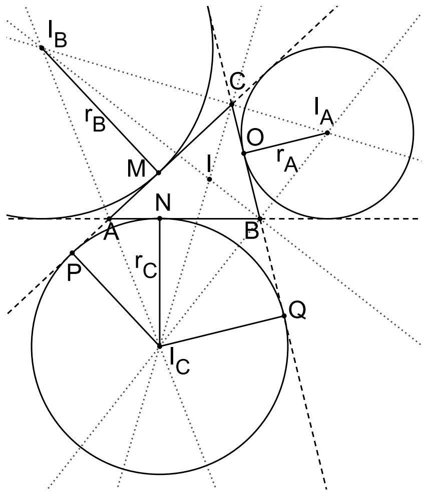
Lemma 3.6. In un triangolo ABC siano r_A, r_B e r_C i raggi delle circonferenze ex-inscritte (il pedice su ciascun raggio corrisponde al vertice opposto) e r il raggio della circonferenza inscritta. Dimostrare che $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_A} + \frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_C}$.

Dimostrazione. Per iniziare dimostreremo che, detto p il semiperimetro di ABC, valgono le relazioni: $rp = \frac{1}{2}r_C(CA + BC - AB)$, $rp = \frac{1}{2}r_A(AB + CA - BC)$, $rp = \frac{1}{2}r_B(BC + AB - CA)$. Consideriamo l'area $\mathcal{A}$ del triangolo ABC, calcolata in questo modo:

$$\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{AI_CC} + \mathcal{A}_{BCI_C} - \mathcal{A}_{BAI_C}\,. \tag{1}$$

Sappiamo che l'area $\mathcal{A}_{ABC}$ equivale al prodotto del semiperimetro per il raggio rp della circonferenza inscritta (*Geometria piana per le gare di matematica*, Lemma 5.10).

[6] Per approfondire con altri risultati interessanti si vedano le proprietà dimostrate in Alsina, Nelsen 2011, pag. 79 e segg.



Osserviamo che nei triangoli AI_CC, BCI_C, BAI_C, considerati rispettivamente sulle basi CA, BC e AB, l'altezza è pari al raggio r_C (con la notazione adottata in figura, $PI_C = QI_C = NI_C = r_C$). Sostituiamo quindi nella (1):

$$rp = \frac{1}{2}CA \cdot r_C + \frac{1}{2}BC \cdot r_C - \frac{1}{2}AB \cdot r_C = \frac{1}{2}r_C(CA + BC - AB)\,. \tag{2}$$

Le altre due relazioni si ottengono allo stesso modo.
Riscriviamo ora diversamente le relazioni appena ricavate:

$$\frac{r}{r_C} = \frac{CA + BC - AB}{2p} \quad , \quad \frac{r}{r_A} = \frac{AB + CA - BC}{2p} \quad , \quad \frac{r}{r_B} = \frac{BC + AB - CA}{2p}\,.$$

Sommiamo termine a termine.

$$\frac{r}{r_A} + \frac{r}{r_B} + \frac{r}{r_C} = \frac{AB + CA - BC + BC + AB - CA + CA + BC - AB}{2p} =$$
$$= \frac{AB + BC + CA}{2p} = 1\,.$$

Da quest'ultima uguaglianza segue immediatamente che $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_A} + \frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_C}$. □

Lemma 3.7. In un triangolo ABC siano r_A, r_B e r_C i raggi delle circonferenze ex-inscritte e r il raggio di quella inscritta. L'area $\mathcal{A}$ di ABC vale $\sqrt{r \cdot r_A \cdot r_B \cdot r_C}$.

Dimostrazione. Siano a, b e c i lati opposti ai vertici A, B e C. Riprendiamo la (2) del lemma precedente con le altre due formule corrispondenti:

$$rp = \mathcal{A} = \frac{1}{2}r_C(CA + BC - AB) = r_C(p - c) = r_A(p - a) = r_B(p - b)\,,$$

da cui

$$p - a = \frac{\mathcal{A}}{r_A}\,, \qquad p - b = \frac{\mathcal{A}}{r_B}\,, \qquad p - c = \frac{\mathcal{A}}{r_C}\,.$$

Inseriamo i risultati appena trovati nella Formula di Erone (*Geometria piana per le gare di matematica*, Lemma 6.1):

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^2 &= p(p-a)(p-b)(p-c)\\ &= p \cdot \frac{\mathcal{A}}{r_A} \cdot \frac{\mathcal{A}}{r_B} \cdot \frac{\mathcal{A}}{r_C}.\end{aligned}$$

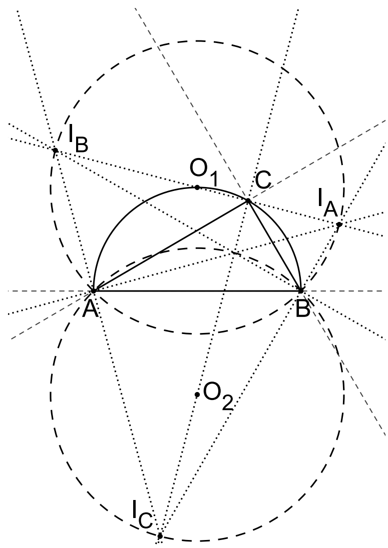
Ricordando che $p = \frac{\mathcal{A}}{r}$, si ottiene:

$$\mathcal{A}^2 = \frac{\mathcal{A}^4}{r \cdot r_A \cdot r_B \cdot r_C},$$

da cui la tesi: $\mathcal{A} = \sqrt{r \cdot r_A \cdot r_B \cdot r_C}$. □

Esempio 3.4. ** (*Sharygin Geometry Olympiad*[7]*, 2009*)
Trovare il luogo geometrico degli excentri di un insieme di triangoli rettangoli aventi in comune l'ipotenusa.

Soluzione. Sia AB l'ipotenusa. Il vertice C dell'angolo retto può muoversi lungo una semicirconferenza di diametro AB, come illustrato nella figura. Siano α e β gli angoli acuti del triangolo rettangolo, rispettivamente $\widehat{CAB}$ e $\widehat{ABC}$.



[7]Gara russa dedicata esclusivamente a problemi di geometria, nata nel 2005 in memoria del matematico Igor Fedorovich Sharygin (1937-2004).

Consideriamo ora il triangolo ABI_B e calcoliamo l'ampiezza dell'angolo $\widehat{I_BAB}$: per costruzione $\widehat{I_BAB} = \widehat{I_BAI_A} + \widehat{I_AAB}$. Ma $\widehat{I_BAI_A}$ è retto perché formato dalle bisettrici di due angoli adiacenti; $\widehat{I_AAB} = \frac{\alpha}{2}$ perché I_AA è bisettrice. Per lo stesso motivo $ABI_B = \frac{\beta}{2}$. Si ricava:

$$\widehat{BI_BA} = 180° - \left(90° + \frac{\alpha}{2}\right) - \frac{\beta}{2} = 90° - \frac{\alpha+\beta}{2}\,.$$

Gli angoli α e β sono complementari e quindi $\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{90°}{2} = 45°$. Perciò $\widehat{BI_BA} = 45°$. Allo stesso modo si dimostra che anche $\widehat{BI_AA} = 45°$. Abbiamo dimostrato che il quadrilatero ABI_AI_B è ciclico (*Geometria piana per le gare di matematica*, Lemma 3.8). Qualunque sia la posizione di C sulla semicirconferenza di diametro AB, gli angoli $\widehat{BI_BA}$ e $\widehat{BI_AA}$ sono congruenti e misurano 45°. Al variare della posizione di C, gli excentri I_A e I_B appartengono sempre allo stesso semipiano rispetto ad AB e vedono il segmento AB secondo un angolo di 45°. I_A e I_B si muovono lungo un arco di circonferenza tale che l'angolo al centro che insiste su AB debba essere retto. Se ne conclude che il centro di questa circonferenza non può che essere il punto medio dell'arco AB, che in figura è indicato con O_1. L'arco di circonferenza ha un'ampiezza di $360° - 90° = 270°$.
Se si passa a considerare l'excentro I_C, si dimostra facilmente che anche l'angolo AI_CB misura 45° indipendentemente dalla posizione di C. Quindi anche I_C si muove su un arco di circonferenza di ampiezza 270° avente centro O_2 simmetrico di O_1 rispetto ad AB. □

3.3 Teoremi di Ceva, Menelao e Stewart

In questo paragrafo saranno enunciati e dimostrati tre teoremi (uno dei quali in due versioni).

Definizione 3.8. In un triangolo si chiama *ceviana*[8] un segmento che congiunge un vertice a un punto del lato opposto o del suo prolungamento.

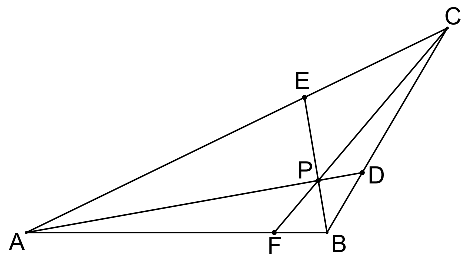
Teorema 3.9. *(Teorema di Ceva)*
In un triangolo ABC tre ceviane AD, BE e CF (con D, E, F punti interni ai lati BC, CA e AB)[9] *concorrono se e solo se vale la seguente relazione:*

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1\,.$$

[8] Il nome deriva dal matematico italiano Giovanni Ceva (1647-1734).

[9] Il Teorema può essere esteso a punti appartenenti ai prolungamenti dei lati, ma il caso non verrà trattato in questo libro.

Dimostrazione. Partiamo dall'ipotesi che AD, BE e CF concorrano in P. I triangoli AFC e FBC hanno la stessa altezza rispetto alle basi AF e FB. Pertanto scriviamo questa proporzione: $AF : FB = \mathcal{A}_{AFC} : \mathcal{A}_{FBC}$. Per lo stesso motivo nei triangoli AFP e FBP vale la proporzione $AF : FB = \mathcal{A}_{AFP} : \mathcal{A}_{FBP}$. Sfruttando una proprietà elementare delle proporzioni abbiamo $AF : FB = \mathcal{A}_{APC} : \mathcal{A}_{BCP}$. Si proceda ora allo stesso modo per gli altri due lati del triangolo. Si ricavano le seguenti proporzioni: $BD : DC = \mathcal{A}_{ABP} : \mathcal{A}_{APC}$ e $CE : EA = \mathcal{A}_{BCP} : \mathcal{A}_{ABP}$.



Le tre proporzioni trovate vanno infine moltiplicate fra loro:

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = \frac{\mathcal{A}_{APC}}{\mathcal{A}_{BCP}} \cdot \frac{\mathcal{A}_{ABP}}{\mathcal{A}_{APC}} \cdot \frac{\mathcal{A}_{BCP}}{\mathcal{A}_{ABP}} = 1\,.$$

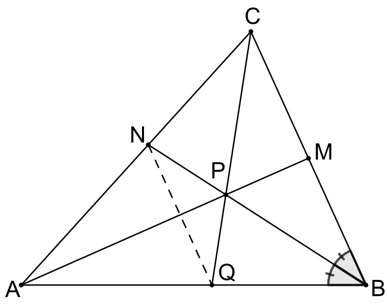
La dimostrazione dell'inverso si svolge per assurdo: poniamo per ipotesi che sia valida la relazione $\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$, ma che le ceviane non siano concorrenti. Sia dunque P il punto di intersezione delle ceviane AD e BE, mentre CF non passa per P. Esiste allora una ceviana CF' distinta da CF che passa per P. Ma per la dimostrazione precedente risulta che $\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF'}{F'B} = 1$. Per ipotesi $\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$, da cui $\frac{AF'}{F'B} = \frac{AF}{FB}$. Dato che ambedue i punti F e F' devono appartenere alla retta AB, e sono o ambedue interni o ambedue esterni ad AB, necessariamente $F = F'$. Ciò è impossibile perché CF' e CF erano segmenti distinti; pertanto CF passa per il punto di intersezione delle altre due ceviane. □

Lemma 3.10. A partire dal Teorema di Ceva è possibile dimostrare che le altezze di un triangolo sono concorrenti (già dimostrato all'Esempio 1.3), che le mediane di un triangolo sono concorrenti, che le bisettrici di un triangolo sono concorrenti.

Esempio 3.5. * (*Revista de Matematică din Timişoara*[10]*, Numero 1, 1978, Problema 3286*)
In un triangolo ABC la mediana AM incontra la bisettrice BN in P. Sia Q il punto di intersezione fra il prolungamento di CP e AB. Dimostrare che il triangolo BNQ è isoscele.

[10] Periodico rumeno dedicato alla matematica, nato nel 1921.

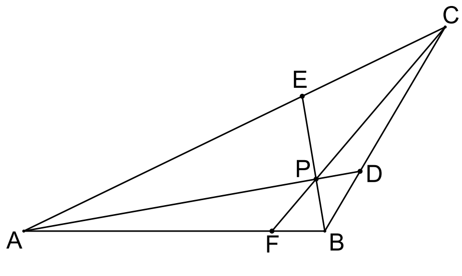
Soluzione. I tre segmenti AM, BN e CQ sono tre ceviane concorrenti in P. Vale pertanto il Teorema di Ceva e $\frac{AQ}{QB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN}{NA} = 1$.



Osserviamo però che M è il punto medio di BC, quindi $\frac{BM}{MC} = 1$ e la precedente relazione diventa $\frac{AQ}{QB} \cdot \frac{CN}{NA} = 1$. Riscrivendo quest'ultima si ottiene $\frac{AQ}{QB} = \frac{NA}{CN}$. Per l'inverso del Teorema di Talete il segmento QN è parallelo al lato BC. Allora $\widehat{BNQ} = \widehat{NBC}$ in quanto angoli alterni interni fra rette parallele. Per ipotesi BN è bisettrice di $\widehat{ABC}$ e $\widehat{QBN} = \widehat{NBC}$. In conclusione $\widehat{BNQ} = \widehat{QBN}$; il triangolo BNQ, avendo due angoli congruenti, è isoscele. □

Teorema 3.11. *(Teorema di Ceva trigonometrico)*
In un triangolo ABC tre ceviane AD, BE e CF uscenti rispettivamente da A, B e C concorrono se e solo se vale la seguente relazione:

$$\frac{\sin \widehat{DAB}}{\sin \widehat{ABE}} \cdot \frac{\sin \widehat{EBC}}{\sin \widehat{BCF}} \cdot \frac{\sin \widehat{FCA}}{\sin \widehat{CAD}} = 1\,.$$



Dimostrazione. Poniamo per ipotesi che le ceviane siano concorrenti. Applicando il Teorema dei seni nel triangolo ABP, si ha che $\frac{\sin \widehat{DAB}}{\sin \widehat{ABE}} = \frac{BP}{AP}$. Allo stesso modo, nel triangolo BCP, $\frac{\sin \widehat{EBC}}{\sin \widehat{BCF}} = \frac{CP}{BP}$; e, nel triangolo CAP, $\frac{\sin \widehat{FCA}}{\sin \widehat{CAD}} = \frac{AP}{CP}$. Moltiplicando fra loro termine a termine le tre uguaglianze, per il Teorema di Ceva si ottiene la tesi.

Per l'implicazione inversa poniamo per ipotesi

$$\frac{\sin \widehat{DAB}}{\sin \widehat{ABE}} \cdot \frac{\sin \widehat{EBC}}{\sin \widehat{BCF}} \cdot \frac{\sin \widehat{FCA}}{\sin \widehat{CAD}} = 1\,.$$

Applicando il Teorema dei seni nel triangolo ABD, risulta $\frac{\sin \widehat{DAB}}{\sin \widehat{BDA}} = \frac{BD}{AB}$. Allo stesso modo, nel triangolo ADC: $\frac{\sin \widehat{CAD}}{\sin \widehat{ADC}} = \frac{CD}{AC}$. Gli angoli $\widehat{BDA}$ e $\widehat{ADC}$ sono supplementari, quindi i loro seni hanno lo stesso valore. Dividiamo termine a termine le due relazioni.

$$\frac{\sin \widehat{DAB}}{\sin \widehat{CAD}} = \frac{BD}{AB} \cdot \frac{AC}{CD}\,. \tag{1}$$

In maniera analoga si costruiscono altre due relazioni dello stesso tipo:

$$\frac{\sin \widehat{EBC}}{\sin \widehat{ABE}} = \frac{CE}{BC} \cdot \frac{BA}{AE} \tag{2}$$

$$\frac{\sin \widehat{FCA}}{\sin \widehat{BCF}} = \frac{AF}{CA} \cdot \frac{CB}{BF}\,. \tag{3}$$

Infine, moltiplicando fra loro termine a termine le (1), (2) e (3) si ottiene il Teorema di Ceva. Come si voleva dimostrare, le ceviane sono concorrenti. □

Il Teorema di Ceva trigonometrico offre una condizione alternativa di concorrenza fra ceviane in un triangolo. L'enunciato può essere riscritto nella forma:

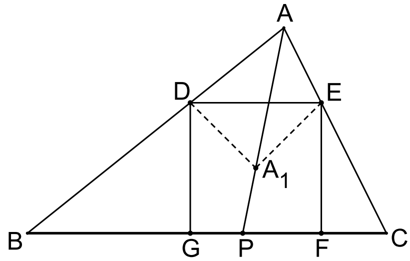
$$\sin \widehat{DAB} \cdot \sin \widehat{EBC} \cdot \sin \widehat{FCA} = \sin \widehat{ABE} \cdot \sin \widehat{BCF} \cdot \sin \widehat{CAD}\,.$$

Esempio 3.6. ** (*International Mathematical Olympiad shortlist*[11]*, 2001*)
Sia A_1 il centro del quadrato inscritto nel triangolo acutangolo ABC avente due vertici sul lato BC, in modo che uno dei due rimanenti vertici appartenga al lato AB e l'altro al lato AC. I punti B_1 e C_1 sono definiti allo stesso modo per quadrati inscritti aventi due vertici sui lati AC e AB, rispettivamente. Dimostrare che i segmenti AA_1, BB_1 e CC_1 sono concorrenti.

Soluzione. Tracciamo il segmento AA_1 e prolunghiamolo fino a incontrare il lato BC in un punto P. Definiamo allo stesso modo Q come intersezione di BB_1 col lato CA e R come intersezione di CC_1 col lato AB. Chiamiamo inoltre, con la notazione usuale, α, β e γ gli angoli $\widehat{CAB}$, $\widehat{ABC}$ e $\widehat{BCA}$.

Siano D, E, F e G i vertici del quadrato costruito sul lato BC, con F e G i vertici appartenenti al lato stesso.

[11] Ogni anno, prima delle IMO (*International Mathematical Olympiad*), i comitati olimpici dei paesi partecipanti possono proporre uno o più problemi al comitato del paese organizzatore; l'elenco completo è detto *longlist*. Tra questi viene fatta una prima selezione (*shortlist*); all'interno della *shortlist* vengono scelti i sei problemi che saranno effettivamente assegnati alla gara. Il presente problema è stato proposto dall'Ucraina.



Si nota immediatamente che $\widehat{ADE} = \beta$ e $\widehat{DEA} = \gamma$, in quanto a due a due angoli corrispondenti fra rette parallele.
Per il Teorema dei seni nel triangolo ADA_1 si ha $\frac{\sin \widehat{PAB}}{DA_1} = \frac{\sin \widehat{ADA_1}}{AA_1}$, quindi

$$\frac{AA_1}{DA_1} = \frac{\sin \widehat{ADA_1}}{\sin \widehat{PAB}} . \tag{1}$$

Analogamente, nel triangolo EAA_1: $\frac{\sin \widehat{A_1EA}}{AA_1} = \frac{\sin \widehat{CAP}}{EA_1}$, cioè

$$\frac{AA_1}{EA_1} = \frac{\sin \widehat{A_1EA}}{\sin \widehat{CAP}} . \tag{2}$$

Abbiamo ora che $EA_1 = DA_1$ in quanto metà delle diagonali del quadrato $EDGF$; è dunque possibile eguagliare la (1) e la (2).

$$\frac{\sin \widehat{ADA_1}}{\sin \widehat{PAB}} = \frac{\sin \widehat{A_1EA}}{\sin \widehat{CAP}} . \tag{3}$$

Osserviamo che $\widehat{ADA_1} = \beta + 45°$ e $\widehat{A_1EA} = \gamma + 45°$, perché le diagonali formano col lato del quadrato angoli di 45°. Si può riscrivere la (3) in questo modo:

$$\frac{\sin(\beta + 45°)}{\sin(\gamma + 45°)} = \frac{\sin \widehat{PAB}}{\sin \widehat{CAP}} . \tag{4}$$

In modo del tutto analogo, costruendo gli altri due quadrati inscritti in ABC, si otterranno altre due relazioni dello stesso tipo:

$$\frac{\sin(\gamma + 45°)}{\sin(\alpha + 45°)} = \frac{\sin \widehat{QBC}}{\sin \widehat{ABQ}} \qquad , \qquad \frac{\sin(\alpha + 45°)}{\sin(\beta + 45°)} = \frac{\sin \widehat{RCA}}{\sin \widehat{BCR}} . \tag{5}$$

A questo punto moltiplichiamo termine a termine la (4) e le (5):

$$\frac{\sin(\beta + 45°)}{\sin(\gamma + 45°)} \cdot \frac{\sin(\gamma + 45°)}{\sin(\alpha + 45°)} \cdot \frac{\sin(\alpha + 45°)}{\sin(\beta + 45°)} = \frac{\sin \widehat{PAB}}{\sin \widehat{CAP}} \cdot \frac{\sin \widehat{QBC}}{\sin \widehat{ABQ}} \cdot \frac{\sin \widehat{RCA}}{\sin \widehat{BCR}} .$$

Il primo termine è uguale a 1, pertanto per il Teorema di Ceva trigonometrico i segmenti AA_1, BB_1 e CC_1 concorrono. □