Proponiamo un problema analogo la cui risoluzione è lasciata al lettore.

Esercizio 1.1. Siano x, y, z numeri reali positivi tali che

$$\frac{\sqrt{xyz}}{x+y} = 3, \qquad \frac{\sqrt{xyz}}{y+z} = \frac{5}{2}, \qquad \frac{\sqrt{xyz}}{z+x} = \frac{15}{7}.$$

Sapendo che $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{n}{900}$, determinare n. (Risposta: $n = 194$)

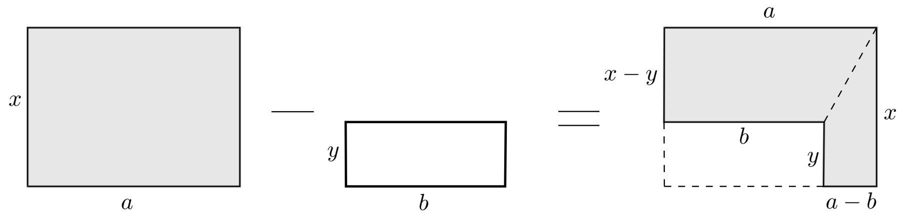
1.2 Identità

Un'*identità* è un'uguaglianza tra due espressioni che risulta valida a prescindere dai valori assunti dalle variabili, con il solo vincolo che le espressioni abbiano significato. Per esempio l'uguaglianza $(2x-5)^2 = 4x^2 - 20x + 25$ è un'identità in quanto è verificata per ogni numero reale x. Anche l'uguaglianza $\left(\sqrt{x-1}\right)^2 = x - 1$ è un'identità, in quanto è verificata per ogni numero reale $x \geq 1$. Invece l'uguaglianza $x^2 - 10x - 600 = 0$ non è un'identità, in quanto è verificata solo se $x \in \{-20, 30\}$.

Osservazione 1.2.1. Talvolta, per dimostrare un'identità, possiamo usare una figura. Ad esempio, l'identità

$$ax - by = \frac{1}{2}(a+b)(x-y) + \frac{1}{2}(a-b)(x+y)$$

può essere spiegata così.



Il valore di $ax - by$ rappresenta la differenza delle aree dei due rettangoli. Sottraendo il rettangolo bianco (di area by) dal rettangolo grigio (di area ax) si ottiene una figura che può essere suddivisa in due trapezi. L'area del primo trapezio è metà dell'area del rettangolo di lati $a+b$, $x-y$, mentre l'area del secondo trapezio è metà dell'area del rettangolo di lati $x+y$, $a-b$.

Osservazione 1.2.2. Se abbiamo un'identità, possiamo sostituire alle variabili qualsiasi numero reale appartenente all'insieme di valori per i quali tutte le espressioni presenti abbiano un significato.

Esempio 1.2.1. Siano $a_0, \ldots, a_5$ numeri reali. Supponiamo che

$$x^5 = a_5(x-1)^5 + a_4(x-1)^4 + a_3(x-1)^3 + a_2(x-1)^2 + a_1(x-1) + a_0$$

per ogni numero reale x. Determinare a_1.

Soluzione. Sostituendo $x = 1$ otteniamo $a_0 = 1$. Pertanto

$$x^5 - 1 = a_5(x-1)^5 + a_4(x-1)^4 + a_3(x-1)^3 + a_2(x-1)^2 + a_1(x-1).$$

Se ora dividiamo entrambi i membri per $x - 1$ otteniamo l'uguaglianza

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = a_5(x-1)^4 + a_4(x-1)^3 + a_3(x-1)^3 + a_2(x-1) + a_1,$$

dalla quale, se sostituiamo $x = 1$, otteniamo $a_1 = 5$. □

Esistono molte interessanti identità che possono essere utili nella risoluzione di problemi algebrici e che è opportuno memorizzare. Elenchiamo qui di seguito alcune identità classiche, molte delle quali sono note come *prodotti notevoli*.

Identità 1.1 (Quadrato del binomio)**.** Per tutti i numeri reali a, b sussiste l'identità

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab.$$

Mostriamo una diretta applicazione dell'Identità 1.1, semplificando una somma di radicali.

Esempio 1.2.2. Determinare il valore dell'espressione

$$E = \sqrt{9^2 + 19} + \sqrt{19^2 + 39} + \sqrt{29^2 + 59} + \cdots + \sqrt{639^2 + 1279}.$$

Soluzione. Osserviamo che

$$9^2 + 19 = 9^2 + 2 \cdot 9 + 1 = (9+1)^2 = 10^2$$
$$19^2 + 39 = 19^2 + 2 \cdot 19 + 1 = (19+1)^2 = 20^2.$$

Con lo stesso ragionamento si trova che $29^2 + 59 = 30^2$, $\ldots$, $639^2 + 1279 = 640^2$. Pertanto, tenuto conto della formula di Gauss che sarà trattata più avanti in questo capitolo, abbiamo

$$\begin{aligned} E &= \sqrt{9^2+19} + \sqrt{19^2+39} + \sqrt{29^2+59} + \cdots + \sqrt{639^2+1279} \\ &= 10 + 20 + 30 + \cdots + 640 \\ &= 10(1+2+\cdots+64) \\ &= 10 \cdot \frac{64 \cdot 65}{2} = 20800. \end{aligned}$$ □

Presentiamo ora un'altra utile identità, strettamente correlata con la precedente, che sarà impiegata nella risoluzione dei due esempi successivi.

Identità 1.2. Per tutti i numeri reali a, b, c sussiste l'identità

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2}\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right].$$

Esempio 1.2.3. Sapendo che $a - b = 2$ e $b - c = 4$, determinare il valore di

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca.$$

Soluzione. Sommando $a - b = 2$ e $b - c = 4$ abbiamo che $a - c = 6$. Allora, usando l'Identità 1.2, abbiamo:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca &= \frac{1}{2}\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(2^2 + 4^2 + 6^2\right) = 28. \end{aligned}$$ □

Esempio 1.2.4. Siano a, b, c numeri reali tali che $|a - b| = 1$, $|b - c| = 1$, $|c - a| = 2$ e $abc = 60$. Determinare il valore di

$$\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c}.$$

Soluzione. Usando l'Identità 1.2 abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} &= \frac{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca}{abc} \\ &= \frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{2abc} \\ &= \frac{1+1+4}{120} = \frac{1}{20}. \end{aligned}$$ □

L'Identità 1.1 ammette la seguente generalizzazione in tre variabili.

Identità 1.3 (Quadrato del trinomio)**.** Per tutti i numeri reali a, b, c sussiste l'identità

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc).$$

Esempio 1.2.5. Siano x, y, z numeri reali positivi tali che $x+y+z=1$ e $xy+yz+zx=\frac{1}{3}$. Determinare il valore dell'espressione

$$\frac{4x}{y+1}+\frac{16y}{z+1}+\frac{64z}{x+1}.$$

Soluzione. Tenuto conto che

$$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)=\frac{1}{3},$$

abbiamo

$$0=x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=\frac{1}{2}(x-y)^2+\frac{1}{2}(y-z)^2+\frac{1}{2}(z-x)^2,$$

da cui segue che $x=y=z=\frac{1}{3}$. Pertanto

$$\frac{4x}{y+1}+\frac{16y}{z+1}+\frac{64z}{x+1}=\frac{\frac{4}{3}}{\frac{1}{3}+1}+\frac{\frac{16}{3}}{\frac{1}{3}+1}+\frac{\frac{64}{3}}{\frac{1}{3}+1}=1+4+16=21. \qquad \square$$

Esempio 1.2.6. Determinare il valore dell'espressione

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ac+bc-ab},$$

sapendo che a, b, c sono tre numeri reali non nulli tali che

$$a+2b+3c=2a+3b+2c=2014.$$

Soluzione. Dato che $a+2b+3c=2a+3b+2c$, si ha che $a+b-c=0$ e quindi

$$0=(a+b-c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc \qquad \Rightarrow$$
$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ac+bc-ab}=2. \qquad \square$$

Esempio 1.2.7. Siano a, b, c numeri reali positivi tali che $a^2+b^2+c^2+abc = 5$, $a+b+c = 3$. Dimostrare che almeno uno dei numeri a, b, c deve essere uguale a 2.

Soluzione. Osserviamo che

$$9 = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc,$$

da cui segue che

$$\begin{aligned} 9 = 2ab + 2ac + 2bc + 5 - abc \quad &\Leftrightarrow \\ 2ab + 2ac + 2bc - abc = 4. \end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned} (2 - a)(2 - b)(2 - c) &= 8 - 4(a + b + c) + 2(ab + bc + ac) - abc \\ &= -4 + 2(ab + bc + ac) - abc = 0, \end{aligned}$$

quindi almeno uno dei numeri a, b, c deve essere uguale a 2. □

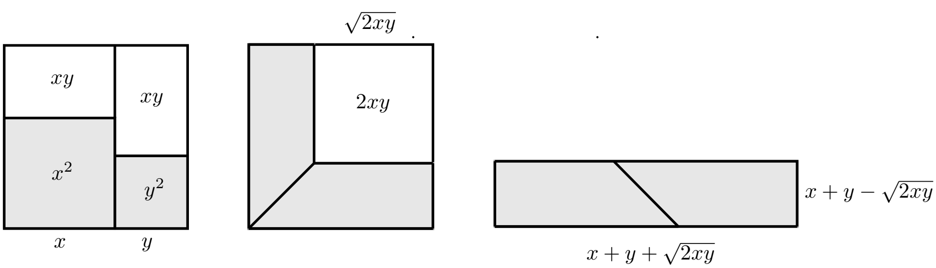
Identità 1.4 (Differenza di quadrati)**.**

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

Osservazione 1.2.3. Dall'Identità 1.4, segue che, se x, y sono numeri non negativi, allora:

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = (x + y)^2 - (\sqrt{2xy})^2 = (x + y - \sqrt{2xy})(x + y + \sqrt{2xy}).$$

Una dimostrazione *senza parole* della precedente identità è data in figura.



Esempio 1.2.8. Sapendo che $x + \sqrt{xy} + y = 9$ e $x^2 + xy + y^2 = 27$, trovare il valore dell'espressione $x - \sqrt{xy} + y$.

Soluzione. Osserviamo che

$$x^2 + xy + y^2 = (x+y)^2 - xy = \left(x + \sqrt{xy} + y\right)\left(x - \sqrt{xy} + y\right).$$

Pertanto $x - \sqrt{xy} + y = \dfrac{27}{9} = 3$. □

Esempio 1.2.9. Sapendo che

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{y+x} = 2017,$$

determinare il valore dell'espressione

$$E = \frac{(y+z-x)^2}{y+z} + \frac{(z+x-y)^2}{z+x} + \frac{(y+x-z)^2}{y+x}.$$

Soluzione. Calcoliamo la differenza $E - 2017$. Utilizzando l'Identità 1.4 abbiamo:

$$\begin{aligned}
E - 2017 &= \frac{(y+z-x)^2}{y+z} + \frac{(z+x-y)^2}{z+x} + \frac{(y+x-z)^2}{y+x} - \frac{x^2}{y+z} - \frac{y^2}{z+x} - \frac{z^2}{y+x} \\
&= \frac{(y+z-x)^2 - x^2}{y+z} + \frac{(z+x-y)^2 - y^2}{z+x} + \frac{(y+x-z)^2 - z^2}{y+x} \\
&= \frac{(y+z)(y+z-2x)}{y+z} + \frac{(z+x)(z+x-2y)}{z+x} + \frac{(y+x)(y+x-2z)}{y+x} \\
&= y + z - 2x + z + x - 2y + y + x - 2z = 0.
\end{aligned}$$

Pertanto $E = 2017$. □

1.3 Completamento del quadrato

Chiamiamo *completamento del quadrato* il procedimento mediante il quale un'espressione algebrica viene trasformata in una forma equivalente in modo che si venga a formare un quadrato più una costante. Se abbiamo, ad esempio, l'espressione $x^2 + ax$, addizionando e sottraendo $a^2/4$ otteniamo:

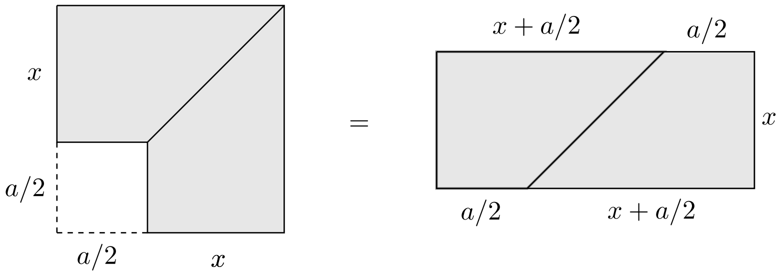
$$x^2 + ax = x^2 + ax + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}.$$

Vale pertanto la seguente identità.

Identità 1.5 (Completamento del quadrato)**.**

$$x^2 + ax = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}.$$

Questa identità è descritta geometricamente in figura.



Esempio 1.3.1. Applicando l'Identità 1.5 otteniamo

- $2x^2 + 5x + 6 = 2\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{23}{8}$
- $a^2 - 2a + 4b^2 - 4b + 7 = (a-1)^2 + (2b-1)^2 + 5$
- $2a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc - 4a + 5 = (b + c - a)^2 + (a-2)^2 + 1.$

Un'altra applicazione del completamento dei quadrati conduce alla famosa Identità di Sophie-Germain[1].

Identità 1.6 (Identità di Sophie-Germain)**.** Per tutti i numeri reali a, b sussiste l'identità

$$a^4 + 4b^4 = (a^2 - 2ab + 2b^2)(a^2 + 2ab + 2b^2).$$

La dimostrazione segue direttamente dalle Identità 1.4 e 1.5:

$$a^4 + 4b^4 = \left(a^2 + 2b^2\right)^2 - 4a^2b^2 = \left(a^2 + 2b^2 - 2ab\right)\left(a^2 + 2b^2 + 2ab\right).$$

[1] Marie-Sophie Germain (1776–1831), matematica francese nota per i suoi contibuti in teoria dei numeri. Era solita firmare i suoi lavori con lo pseudonimo maschile Antoine-August Le Blanc, in quanto ai suoi tempi le donne erano escluse dal mondo culturale e accademico.

Esempio 1.3.2. Dall'Identità di Sophie-Germain otteniamo, ad esempio, le seguenti fattorizzazioni:

- $n^4 + 4 = \left(n^2 - 2n + 2\right)\left(n^2 + 2n + 2\right)$
- $4n^4 + 1 = \left(2n^2 - 2n + 1\right)\left(2n^2 + 2n + 1\right)$
- $19^{4n} + 4 = \left(19^{2n} - 2 \cdot 19^n + 2\right)\left(19^{2n} + 2 \cdot 19^n + 2\right)$.

Esempio 1.3.3. Dato un numero intero n maggiore di 1, dimostrare che $n^4 + 4^n$ è un numero composto.

Soluzione. Se n è pari, allora, banalmente, $n^4 + 4^n$ è divisibile per 2.
Se, invece, n è dispari, allora, posto $n = 2k + 1$, si ha:

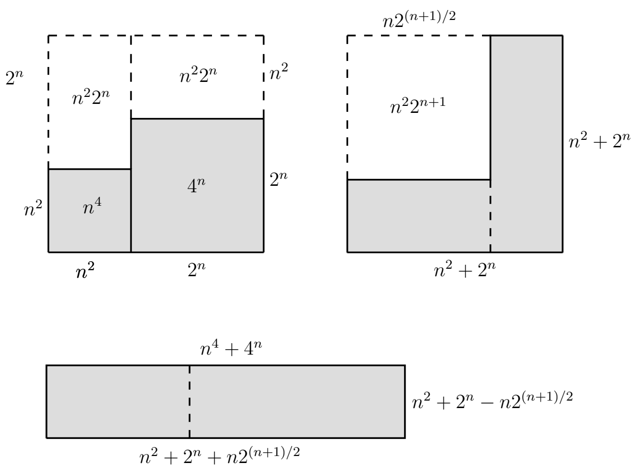
$$n^4 + 4^n = n^4 + 4^{2k+1} = n^4 + 4 \cdot \left(2^k\right)^4.$$

Il secondo membro, essendo della forma $a^4 + 4b^4$, si può fattorizzare con l'Identità di Sophie Germain:

$$n^4 + 4 \cdot \left(2^k\right)^4 = (n^2 + 2 \cdot 2^{2k} + 2 \cdot n \cdot 2^k)(n^2 + 2 \cdot 2^{2k} - 2 \cdot n \cdot 2^k).$$

Il numero $n^4 + 4^n$ è composto in quanto, se $n > 1$, entrambi i fattori sono interi maggiori di 1. $\square$

Osservazione 1.3.1. La seguente figura fornisce una dimostrazione del problema precedente, nel caso in cui n è dispari, cioè se $\frac{n+1}{2}$ è un numero intero.



Un'altra elegante applicazione della tecnica del completamento dei quadrati è un'identità nota come *Identità di Lagrange*[2].

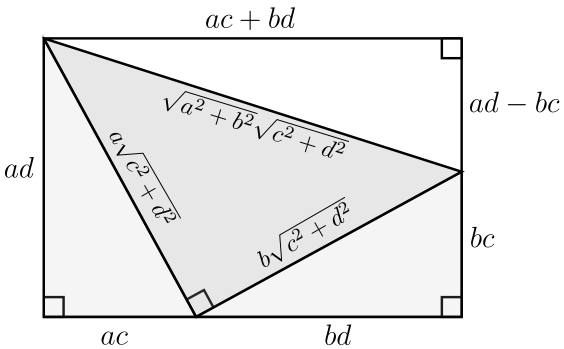
Identità 1.7 (Identità di Lagrange)**.** Per tutti i numeri reali a, b, c, d sussiste l'identità

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2.$$

Dimostrazione. L'identità segue direttamente dalla formula del quadrato del binomio.

$$\begin{aligned}(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) &= (ac)^2 + (bd)^2 + (ad)^2 + (bc)^2 \\ &= (ac)^2 + (bd)^2 - 2abcd + (ad)^2 + (bc)^2 + 2abcd \\ &= (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2. \qquad \square\end{aligned}$$

Osservazione 1.3.2. In figura



possiamo vedere una dimostrazione geometrica dell'Identità di Lagrange; la formula discende dal *Teorema di Pitagora* applicato al triangolo rettangolo centrale.

Esempio 1.3.4. Determinare $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ sapendo che a, b, c, d sono quattro numeri naturali tali che $ac - bd = 9$ e $ad + bc = 44$.

Soluzione. Osserviamo che

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = 9^2 + 44^2 = 2017,$$

[2] Joseph-Louis Lagrange, (1736-1813), matematico e astronomo italiano

da cui segue che $\{a^2+b^2, c^2+d^2\} = \{1, 2017\}$ dato che 2017 è un numero primo. Pertanto

$$a^2+b^2+c^2+d^2 = 1+2017 = 2018. \qquad \square$$

Esistono anche delle identità notevoli di terzo grado come, ad esempio, le seguenti.

Identità 1.8 (Identità di terzo grado)**.**

❶ $(a+b)^3 = a^3+3ab(a+b)+b^3$ (Cubo del binomio)

❷ $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$

❸ $a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

❹ $(a+b)(b+c)(c+a) = a^2b+b^2c+c^2a+b^2a+c^2b+a^2c+2abc$

❺ $(a-b)(b-c)(c-a) = b^2a+c^2b+a^2c-a^2b-b^2c-c^2a$

❻ $(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right) = a^3+b^3+c^3+a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ac^2$

❼ $(a+b+c)(ab+ac+bc) = (a+b)(b+c)(c+a)+abc$

❽ $(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(a+b+c)(ab+bc+ca)-3abc$

❾ $(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$

❿ $a^3+b^3+c^3-3abc = \dfrac{1}{2}(a+b+c)((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2)$

Nei prossimi due esempi utilizzeremo l'Identità 1.8.5, dopo aver moltiplicato alcune espressioni per un opportuno numero.

Esempio 1.3.5. Determinare il valore dell'espressione $abc(a+b+c)$, sapendo che a, b, c sono numeri reali tali che $a^2-ab = b^2-bc = c^2-ac = 1$.

Prima soluzione. Osserviamo che

$$a^2-ab = 1, \quad b^2-bc = 1, \quad c^2-ac = 1. \tag{1.1}$$

Moltiplicando la prima uguaglianza per b, la seconda per c e la terza per a otteniamo:

$$a^2b-ab^2 = b, \quad b^2c-c^2b = c, \quad ac^2-a^2c = a. \tag{1.2}$$